



Mário José Calisto Safara

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

Deteção de Dano em Estruturas Reticuladas Utilizando Análise de Vibrações

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: António Paulo Vale Urgueira, Prof. Associado,
FCT-UNL

Co-orientadora: Raquel Albuquerque Soares Brás de Almeida,
Prof. Auxiliar, FCT-UNL

Júri:

Presidente: Prof. Doutor João Mário Burguete Cardoso

Arguente: Prof. Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva

Vogal: Prof. Doutor António Paulo Vale Urgueira



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março de 2016

Deteção de Dano em Estruturas Reticuladas Utilizando Análise de Vibrações

Copyright© 2016 Mário José Calisto Safara, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Este trabalho foi redigido segundo o novo acordo ortográfico em vigor.

À minha família e amigos...

Agradecimentos

Agradeço a todo o corpo docente da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa que fez parte do meu percurso académico, em particular ao meu orientador, Professor António Urgueira pelos sólidos conhecimentos que foram, sem dúvida, uma ajuda valiosa na elaboração desta dissertação. Uma palavra de gratidão também à minha co-orientadora, Professora Raquel Almeida por todo o apoio prestado, mesmo em períodos difíceis. Sem eles, este trabalho não poderia ter sido realizado da forma que foi.

À minha família, em particular ao meu pai, Domingos José, à minha mãe, Maria Petronila, à avó Olga, ao avô Alexandre e ao meu irmão João Miguel, por toda a educação e valores transmitidos, amor, apoio e companhia.

Ao avô Domingos e avó Joaquina, que apesar de não terem oportunidade de ver o seu neto como um Engenheiro, de certeza que teriam o maior orgulho em mim.

Aos professores que passaram por mim no ensino secundário, alguns dos quais me transmitiram o gosto e as bases necessárias para o percurso académico que escolhi.

A todos os amigos que estiveram ao meu lado durante o meu percurso académico, em especial ao “grupo dos 7”, porque sem os momentos que passámos juntos isto não tinha nem metade da piada.

Aos meus colegas de laboratório, Pedro Riscado e Emanuel Semedo, pois nos momentos mais chatos havia sempre uma gargalhada para dar.

Por fim, quero agradecer a todos os outros amigos da faculdade e da minha cidade, Setúbal, pois sem vocês nada teria sido como foi.

Bem hajam a todos!

Resumo

Quando uma determinada estrutura está sujeita a condições de trabalho reais existe sempre desgaste, fadiga, fissuras e, conseqüentemente, danos estruturais que, por vezes, não são passíveis de serem observados a olho nu. Torna-se, então, essencial desenvolver e validar métodos que permitam a sua deteção e localização numa fase tão precoce quanto possível.

Nesta dissertação pretende-se estudar uma metodologia de identificação de dano em dois tipos de estruturas reticuladas, uma linear e outra treliçada. Em ambas desenvolve-se um método numérico, baseado em elementos de barra, recorrendo ao Método dos Elementos Finitos (MEF), que é posteriormente simulado no *software MatLab*. São também simuladas diversas excitações às estruturas em diferentes coordenadas e a respetiva medição de respostas. Através do *software Excel* são calculadas as Funções de Transmissibilidade entre cada elemento, que são, depois, utilizadas num indicador de dano, transversal a toda a dissertação.

Como preparação para o estudo da estrutura treliçada é feita uma análise a uma estrutura triangular simples, de forma a tentar perceber as principais diferenças no comportamento do elemento barra, quando sujeito à presença de dano, estudado num sistema de coordenadas unidimensional (estrutura linear) e num sistema bidimensional (estrutura triangular).

Palavras-chave: Funções de Resposta em Frequência; Funções de Transmissibilidade; Indicador de Dano; deteção e localização de dano; estrutura linear; estrutura treliçada.

Abstract

When a particular structure is under its actual working conditions there is always wear, fatigue, cracks and, consequently, structural damage, which sometimes cannot be seen with the naked eye. It is then essential to develop and validate methods for their detection and localization in an early stage.

In this dissertation it is intended to study a damage identification methodology in two types of reticulated structures, one of them being linear and the other being a truss. For both, a numerical method is developed, based on bar elements, using the Finite Elements Method (FEM) and then being simulated in the software MatLab. Different excitations at different coordinates and their respective measuring responses are also simulated. Through the software Excel, Transmissibility Functions are calculated between each element, which are then used in a damage indicator, used for the entire dissertation.

As a preparation for the study of the truss structure, a simple triangular structure is analyzed, in order to try to understand the major differences in the behavior of the bar element when subjected to the presence of damage, being studied in a one-dimensional coordinate system (linear structure) and also in a two-dimensional system (triangular structure).

Keywords: *Frequency Response Functions; Transmissibility Functions; Damage Indicator; damage detection and localization; linear structure; truss structure*

Índice de Matérias

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	iii
Abstract.....	v
Índice de Matérias.....	vii
Índice de Figuras.....	ix
Índice de Tabelas.....	xi
Simbologias e Notações.....	xiii
Abreviaturas.....	xiv
1 Introdução.....	1
1.1 Enquadramento e Motivação.....	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Revisão Bibliográfica	3
1.3.1 Introdução.....	3
1.3.2 Estado da Arte	4
1.3.3 Uso de FRFs na Detecção de Dano	7
1.3.4 Uso da Transmissibilidade na Detecção e Localização do Dano	8
1.4 Estrutura da Dissertação	12
2 Conceitos Teóricos.....	13
2.1 Introdução.....	13
2.2 Modelo Baseado nas FRFs	13
2.3 Conceito de Transmissibilidade para Sistemas com N GDL	15
2.4 Método dos Elementos Finitos Aplicado a Treliças	20
3 Modelo Numérico da Estrutura Linear.....	25
3.1 Introdução.....	25
3.2 Sistema Massa-Mola	28
3.2.1 Modelação do Dano e Respetivo Indicador.....	29
3.2.2 Simulação Numérica das Vibrações Axiais	32
3.2.3 Indicador de Dano Contínuo	38
3.2.4 Influência da Gama de Frequência na Localização do Dano	40
3.3 Sistema Massa-Mola Não Homogéneo	42
3.3.1 Indicador de Dano Contínuo	48
3.3.2 Influência da Gama de Frequências na Localização do Dano	49
3.4 Conclusões	52
4 Modelo Numérico da Estrutura Treliçada.....	53
4.1 Introdução.....	53
4.2 Estrutura Triangular	54

4.2.1	Estrutura Triangular em Regime Livre-Livre.....	54
4.2.1.1	Modelação do Dano.....	57
4.2.1.2	Simulação Numérica das Vibrações Axiais	58
4.3	Estrutura Triangular Biapoiada	61
4.3.1	Modelação do Dano.....	63
4.3.2	Simulação Numérica de Vibrações Axiais	64
4.4	Estrutura Treliçada	70
4.5	Conclusões	80
5	Conclusões Finais e Desenvolvimentos Futuros.....	81
Anexos	87

Índice de Figuras

Figura 2.1 Sistema Representativo das Coordenas A, U e K [46].....	16
Figura 2.2 Exemplo de Estrutura Treliçada [49]	20
Figura 2.3 Elemento Viga [48].....	21
Figura 2.4 Elemento Barra [48].....	22
Figura 2.5 Aproximação a um sistema Massa-Mola [49]	22
Figura 2.6 Sistema Cartesiano Global XY [49].....	23
Figura 3.1 Estrutura Linear [40].....	25
Figura 3.2 Sistema Massa-Mola com 4 GDL	28
Figura 3.3 Excitação axial no nó 1, dano em K1. FRFs para cada elemento s/dano (1º linha), FRFs para cada elemento c/dano (2º linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3º linha).	33
Figura 3.4 Excitação axial no nó 2, dano em K3. FRFs para cada elemento s/ dano (1º linha), FRFs para cada elemento c/ dano (2º linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3º linha).	37
Figura 3.5 IDC para K2 Danificado, com Excitação Axial no nó 1.....	39
Figura 3.6 Excitação axial no nó 1, dano em K1. FRFs para cada elemento s/dano (1º linha), FRFs para cada elemento c/dano (2º linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3º linha).	45
Figura 3.7 Excitação axial no nó 2, dano em K3. FRFs para cada elemento s/dano (1º linha), FRFs para cada elemento c/dano (2º linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3º linha).	46
Figura 3.8 IDC para K2 Danificado, com Excitação Axial no nó 1 (Estrutura Não Homogénea).....	48
Figura 4.1 Estrutura Triangular com três nós e três elementos	55
Figura 4.2 FRF $H_{1,1}$ da Estrutura Triangular	59
Figura 4.3 FRF $H_{5,1}$ da Estrutura Triangular	60
Figura 4.4 Estrutura Triangular Biapoiada com três nós e três elementos	61
Figura 4.5 FRF $H_{1,1}$ da Estrutura Triangular Biapoiada	64
Figura 4.6 FRF $H_{5,1}$ da Estrutura Triangular Biapoiada	65
Figura 4.7 Estrutura Treliçada Biapoiada com cinco nós e sete elementos.....	70

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 Dados de cada elemento da estrutura simulada numericamente.....	26
Tabela 3.2 Frequências Naturais da Estrutura.....	27
Tabela 3.3 Frequências Naturais do Sistema Massa Mola.....	29
Tabela 3.4 Frequências naturais da Estrutura com e sem dano.....	30
Tabela 3.5 Modos de Vibração com Dano em K1 e K3.....	31
Tabela 3.6 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 1 (0-12 Hz)	34
Tabela 3.7 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 2 (0-12 Hz)	35
Tabela 3.8 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 3 (0-12 Hz)	35
Tabela 3.9 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 4 (0-12 Hz)	36
Tabela 3.10 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação (0-12Hz)	38
Tabela 3.11 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 1 (0-2 Hz)	40
Tabela 3.12 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 2 (0-2 Hz)	41
Tabela 3.13 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 3 (0-2 Hz)	41
Tabela 3.14 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 4 (0-2 Hz)	41
Tabela 3.15 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação (0-2Hz)	42
Tabela 3.16 Constantes de rigidez da estrutura não homogénea.....	42
Tabela 3.17 Frequências naturais do sistema massa mola não homogénio.....	43
Tabela 3.18 Frequências naturais da estrutura não homogénea com e sem dano	44
Tabela 3.19 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 1 (0-12 Hz)	46
Tabela 3.20 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 2 (0-12 Hz)	46
Tabela 3.21 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 3 (0-12 Hz)	47
Tabela 3.22 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 4 (0-12 Hz)	47
Tabela 3.23 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação, no estudo da estrutura não homogénea (0-12Hz).....	47
Tabela 3.24 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 1 (0-2 Hz)	50
Tabela 3.25 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 2 (0-2 Hz)	50
Tabela 3.26 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 3 (0-2 Hz)	50
Tabela 3.27 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 4 (0-2 Hz)	51
Tabela 3.28 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação (0-2Hz)	51
Tabela 4.1 Frequências Naturais da Estrutura Triangular.....	56
Tabela 4.2 Modos de Vibração da Estrutura Triangular	56
Tabela 4.3 Renomeação dos GDL da estrutura	57
Tabela 4.4 Frequências Naturais da Estrutura Triangular com e sem Dano	58
Tabela 4.5 Frequências Naturais da Estrutura Triangular Biapoiada.....	62
Tabela 4.6 Frequências Naturais da Estrutura Triangular Biapoiada com e sem Dano	63
Tabela 4.7 Resumo dos Casos Estudados na Estrutura Triangular Biapoiada	66
Tabela 4.8 Indicadores de Dano para o caso A (0-10 Hz).....	66
Tabela 4.9 Indicadores de Dano para o caso B (0-10 Hz).....	67
Tabela 4.10 Indicadores de Dano para o caso C (0-10 Hz).....	67
Tabela 4.11 Indicadores de Dano para o caso D (0-10 Hz).....	67
Tabela 4.12 Indicadores de Dano para o caso E (0-10 Hz).....	68
Tabela 4.13 Indicadores de Dano para o caso F (0-10 Hz)	68
Tabela 4.14 Indicadores de Dano para o caso G (0-10 Hz).....	68
Tabela 4.15 Indicadores de Dano para o caso H (0-10 Hz).....	69
Tabela 4.16 Resumo do comportamento registado em todos os casos de estudo (0-10Hz).....	69
Tabela 4.17 Frequências Naturais da Estrutura Treliçada Biapoiada.....	71
Tabela 4.18 Renomeação dos nós da estrutura treliçada biapoiada	72
Tabela 4.19 Resumo dos Casos Estudados na Estrutura Treliça Biapoiada.....	73
Tabela 4.20 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 1 (0-10 Hz)	73
Tabela 4.21 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 2 (0-10 Hz)	74
Tabela 4.22 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 3 (0-10 Hz)	74
Tabela 4.23 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 4 (0-10 Hz)	75

Tabela 4.24 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 5 (0-10 Hz)	75
Tabela 4.25 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 6 (0-10 Hz)	76
Tabela 4.26 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 7 (0-10 Hz)	76
Tabela 4.27 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 8 (0-10 Hz)	77
Tabela 4.28 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 9 (0-10 Hz)	77
Tabela 4.29 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 10 (0-10 Hz)	78
Tabela 4.30 Resumo do comportamento padrão registrado na localização do dano na treliça em todos os casos de estudo (0-10Hz)	79

Simbologia e Notação

C	matriz de amortecimento viscoso
$f \ t$	vetor de forças
$\left[H_{ij} \ \omega \right]$	matriz de receptância que relaciona as coordenaas i e j
H^d	resposta obtida na estrutura danificada
T^d	transmissibilidade calculada na estrutura danificada
X_i	deslocamento medido na coordenada i
$\left[F_j \right]$	força aplicada na coordenada j
K	matriz de rigidez
K_G	matriz de rigidez em coordenadas globais
K_l	matriz de rigidez coordenadas locais
K_{1d}	matriz de rigidez com elemento 1 danificado
M	matriz de massa
A	área da secção transversal
E	Módulo de <i>Young</i>
L	comprimento da secção/elemento
ρ	massa volúmica
Ω_{\min}	frequência inicial
Ω_{actual}	frequência atual
T	matriz de transformação de coordendas
$\left[T_{ij}^{(A)} \right]$	matriz de transmissibilidade entre coordenadas i e j, com excitação na coordenada A
$T_{1 \rightarrow 2}$	transmissibilidade entre as coordenadas 1 e 2

$x \ t$	vetor de deslocamento
$\dot{x} \ t$	vetor de velocidade
$\ddot{x} \ t$	vetor de aceleração
F_A	vetor de forças aplicadas na coordenada A
X_U	vetor de respostas na coordenada U
F_A	vetor de forças aplicadas na coordenada A
$\begin{bmatrix} Z & \omega \end{bmatrix}$	matriz de rigidez dinâmica
T	matriz transposta
$^{-1}$	matriz inversa
ω_n	frequência natural
ω_i	frequência natural não danificada
ω_i^d	frequência natural danificada

Abreviaturas

FRF	Função de Resposta em Frequência
FT	Função de Transmissibilidade
MEF	Método dos Elementos Finitos
GDL	Graus de Liberdade
ID	Indicador de Dano
FEM	<i>Finite Element Method</i>
NFN	Normalização de Frequências Naturais

1 Introdução

No presente capítulo, é proporcionada uma visão genérica acerca do trabalho desenvolvido, começando por se apresentar o enquadramento e motivação do mesmo, seguindo-se a explicitação dos objetivos propostos neste trabalho e uma descrição sumária das duas partes principais constituintes desta dissertação. Posteriormente, é apresentado o modo como foi feita a modelação e simulação numérica das diferentes estruturas. De seguida, é feita uma introdução sobre a importância da deteção de dano o tão precocemente quanto possível, nomeadamente através de monitorização contínua estrutural e da utilização de ensaios não destrutivos. Posteriormente, é apresentado o estado de arte onde serão citados diversos estudos realizados por investigadores que recorrem às **Funções de Resposta em Frequência (FRFs)** e **Funções de Transmissibilidade (FTs)** para detetar e localizar dano, utilizando diferentes abordagens em diversas estruturas. No final, será abordado o estudo do dano estrutural em treliças e serão apresentados os estudos aí realizados. Na parte final, é apresentada a estrutura da dissertação bem como um breve resumo do conteúdo de cada capítulo.

1.1 Enquadramento e Motivação

Hoje em dia, muitos profissionais de Engenharia deparam-se com sérios problemas de segurança nas infraestruturas por si projetadas devido essencialmente a dois fatores importantes. Por um lado, estas vão-se tornando naturalmente mais antigas, aproximando-se do seu período de vida útil, enquanto que por outro lado, as cargas a que estão sujeitas são cada vez maiores, devido, por exemplo, ao aumento do tráfego rodoviário, no caso das pontes. Assim, torna-se cada vez mais importante estimar quanto tempo é que a estrutura ainda vai permanecer operacional, mas também detetar o dano numa fase tão precoce quanto possível, evitando desta forma a ocorrência de danos materiais mas também de perdas humanas.

Nesta área da Engenharia os investigadores procuram, em geral, a resposta a cinco perguntas [1]: O dano existe? (Detecção); Onde está o dano? (Localização); Qual o estado de avanço do dano? (Quantificação); Qual o tipo de dano? (Classificação); Quanto tempo é que a estrutura ainda vai permanecer operacional? (Previsão).

O efeito das vibrações em estruturas é geralmente associado a comportamentos relacionados com a fadiga e que podem levar ao colapso das mesmas. Porém, o recurso à análise das vibrações poderá vir a revelar-se altamente vantajoso devido à possibilidade de se efetuar uma monitorização contínua da estrutura em estudo.

Na área da mecânica estrutural, a monitorização contínua tem como principal objetivo a deteção e localização de possíveis danos que não sejam possíveis de verificar a olho nu e que estejam num estado muito inicial. Têm sido realizados diversos estudos sobre esta matéria, todos eles com um objetivo em comum, que passam por formular diversos critérios e indicadores de modo a detetar e localizar o dano o mais cedo possível.

Muitos autores têm proposto diferentes métodos para detetar e localizar dano com métodos especificamente desenvolvidos para o elemento viga. Assim, uma das principais razões da elaboração desta dissertação é perceber a deteção, localização e quantificação de dano numa treliça utilizando elementos de barra e transmissibilidades de movimento. Sendo a treliça uma estrutura constituída por elementos barra, os esforços a que está sujeita são apenas do tipo axial (tração ou compressão), não existindo então esforço transversal nem momento fletor, como acontece no elemento viga, podendo haver assim diferenças significativas nas características dinâmicas destes dois tipos de elementos.

O interesse deste tema passa, então, por tentar perceber de que modo é que a diminuição da rigidez de uma barra constituinte de uma treliça afeta a capacidade de detetar dano.

1.2 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é o desenvolvimento de um método baseado em dados obtidos numericamente através da análise de vibrações, nomeadamente as FRFs e as FTs, que permita detetar a presença de dano numa estrutura reticulada, mas também a localização do mesmo, recorrendo em ambos os casos a um **Indicador de Dano (ID)** com base em alterações das características dinâmicas da estrutura, mais concretamente na alteração da rigidez de um dos elementos que constituem a mesma.

O plano de trabalho é dividido em duas partes com uma metodologia semelhante, mudando somente o tipo de estrutura em estudo:

- i) Estrutura Linear com 4 nós, 3 elementos e 4 Graus de Liberdade (G.D.L.) apresentada no Capítulo 3
- ii) Estrutura Treliçada apresentada no Capítulo 4
 - Estrutura Triangular com 3 nós e 3 elementos (Treliça simples)
 - Estrutura Treliçada com 5 nós e 7 elementos

1.3 Revisão Bibliográfica

1.3.1 Introdução

As estruturas civis, durante o seu período de vida útil, estão sujeitas a diferentes tipos de carregamentos estáticos e dinâmicos entre os quais fazem parte as cargas permanentes, os impactos, e alguns carregamentos externos de entre os quais se destacam o movimento de pessoas e veículos, a ação do vento e da chuva, entre outros. Estes carregamentos em conjunto com fenómenos de corrosão, reações químicas, desgaste associado ao seu normal funcionamento, podem originar fadiga e, consequentemente, diferentes tipos de dano que podem depender do tipo de geometria utilizada e do material usado na construção de diversas estruturas.

Como consequência da perda de integridade da estrutura, a sua capacidade normal de funcionamento poderá vir a ser afetada, dando origem a problemas de fissuração e, consequentemente, alterações na resposta dinâmica inerente à mesma. Assim, poderão vir a surgir situações de risco de insegurança no normal funcionamento da mesma ou até ocorrer um colapso estrutural. Assim, a identificação de um possível dano em estruturas durante o seu período de funcionamento é extremamente importante. Geralmente os danos identificados refletem perdas de rigidez que podem ser causados por uma redução da secção transversal de um componente estrutural, por exemplo, por fissuras. Outro motivo que poderá levar à identificação de dano numa estrutura é uma alteração nas propriedades físicas do material constituinte, por exemplo a diminuição do módulo de elasticidade, provocado por agentes químicos.

De forma a eliminar possíveis dúvidas no que diz respeito à integridade estrutural de uma estrutura, é imprescindível a utilização de um ou mais métodos que permitam determinar a condição global desta, visto que um dano não visível a olho nu pode resultar na fratura de um elemento constituinte, podendo levar assim ao colapso da estrutura, resultando em enormes prejuízos humanos e económicos.

Apesar da existência de técnicas de avaliação e deteção de dano não-destrutivas [2], entre as quais se destacam a inspeção visual, raios X, correntes induzidas, ultra-sons, líquidos penetrantes, ressonância magnética, continua a verificar-se a ocorrência de acidentes em estruturas devido ao facto da análise efetuada por estas técnicas ser uma análise local e não global, ou seja, a estrutura só é analisada em certas regiões e não na sua totalidade. A análise completa da estrutura utilizando estas técnicas referidas não é muito comum na indústria pois apresentam custos elevados, pessoal especializado e é um processo moroso levando à interrupção do seu funcionamento, tornando-se assim impraticável.

Com a necessidade de detetar o dano o mais precocemente possível, a investigação e desenvolvimento de técnicas eficazes de *Structural Health Monitoring (SHM)*, em português designada monitorização de integridade estrutural, tem sido o principal objetivo de diversos investigadores. Uma das abordagens incide especialmente no estudo da influência do dano ao nível do seu comportamento dinâmico, nomeadamente nas três principais características mecânicas da estrutura: a massa, a rigidez e o amortecimento, uma vez que estas irão influenciar as propriedades modais da mesma, frequências naturais, modos de vibração e constantes de amortecimento.

Na década de 60, os primórdios dos estudos na área da deteção de dano em estruturas, eram utilizados modelos numéricos que correlacionavam as propriedades dinâmicas obtidas na avaliação de elementos estruturais com e sem dano.

1.3.2 Estado da Arte

Os métodos de deteção de dano com base na resposta da estrutura têm como objetivo principal uma análise global da integridade da mesma, através de modificações nas características, sejam elas estáticas ou dinâmicas. A caracterização estática e/ou dinâmica de uma estrutura pode ser obtida por via da análise de certos pontos críticos previamente determinados da estrutura. Os valores medidos podem ser comparados com os valores obtidos através de um modelo numérico de elementos finitos. No entanto, neste processo conseguem-se destacar duas desvantagens. Este método não fornece muitas informações a respeito da integridade estrutural da estrutura em estudo, o que dificulta a identificação do dano, nomeadamente se existirem vários danos localizados em diferentes pontos da estrutura. Outra desvantagem está relacionada com a aquisição de dados por via experimental, pois as alterações provocadas pelo ruído nas características dinâmicas podem ser maiores do que aquelas provocadas pela presença de dano, podendo conduzir, assim, a erros na identificação e localização do dano. Quando é realizado um ensaio experimental, o ruído faz-se sentir através de diferentes causas, como a precisão

dos sistemas de aquisição ou a influência de forças eletromagnéticas externas que afetam a transmissão de sinais.

Nos últimos anos, o estudo de novas técnicas de análise modal tem permitido a identificação das características modais de diversos tipos de estruturas. Paralelamente a este desenvolvimento, diversos investigadores têm desenvolvido métodos capazes de detetar e localizar danos estruturais.

Rytter [3] distingue diferentes níveis para caracterizar o dano em que cada um dos níveis fornece informação detalhada acerca do dano. O objetivo é determinar quando, onde e quão danificada está a estrutura.

De acordo com a revisão bibliográfica de *Chesné et al.* [4] e *Doebling et al.* [5] existe imensa bibliografia acerca da deteção e localização de dano, porém alguns métodos não têm tido sucesso, devido essencialmente a dois principais motivos: (i) as propriedades modais da estrutura estão também dependentes de fatores externos, por exemplo, o vento, que podem causar alterações nas vibrações mecânicas de uma estrutura na mesma ordem de grandeza do que uma alteração provocada pela presença de dano; (ii) os modos de vibração e respetivas frequências naturais são propriedades globais que não são muito sensíveis à presença de pequenos danos.

Segundo *Park et al.* [6] as técnicas de deteção de dano podem-se dividir em duas classes principais: métodos onde é necessário um modelo numérico da estrutura e os métodos experimentais que utilizam dados obtidos através da experimentação.

A presença de dano numa estrutura está diretamente relacionada com uma redução da rigidez da mesma. Assim, como é fácil perceber através da equação (1.1), as frequências naturais dessa estrutura estão naturalmente sujeitas a essas alterações de rigidez.

$$\det[K - \omega_n^2 M] = 0 \quad (1.1)$$

onde K diz respeito à matriz rigidez e M à matriz massa.

Segundo *Sinou* [7], o artigo pioneiro que estuda a deteção de dano através da comparação das frequências naturais registadas na estrutura foi apresentado em 1969 por *Lifshitz e Rotem* [8].

Messina et al. [9] apresentaram um estudo que sugere a observação de alterações das frequências de vibração natural de uma estrutura, produzidas pela presença de dano.

De acordo com *Salawu et al.* [10] e *Lam et al.* [11] são referidas dificuldades verificadas em diversos métodos de deteção de dano através da informação fornecida pelas frequências naturais, antes e após o dano ocorrer, tornando-se assim numa informação insuficiente para localizar corretamente o dano.

Sinou [7] sugere o critério de Normalização de Frequências Naturais (NFN) para a identificação de dano, que tem como base o quociente entre a i -ésima frequência natural danificada e não danificada.

$$NFN_i = \frac{\omega_i^d}{\omega_i} \quad (1.2)$$

onde d diz respeito à estrutura danificada.

Segundo diversos autores, os modos de vibração são uma característica espacial que uma estrutura adquire quando vibra a uma das suas frequências naturais. Assim, a presença de dano conduz a alterações nesses mesmos modos.

Lam et al. [11] utilizou os modos de vibração naturais para desenvolver duas técnicas, *Approximate Parameter Change* (APC) e *Damage Signature Matching* (DSM), que utilizam as alterações medidas nos modos de vibrações antes e depois do aparecimento do dano e, segundo o autor, a combinação destas duas técnicas constitui um método prático para a deteção e localização de dano em estruturas.

Morais [12] refere que a desvantagem associada ao uso dos modos de vibração está relacionada com a necessidade de serem necessários um grande número de pontos de medição experimentais para conseguir recriar os modos de vibração com precisão, especialmente nos modos que correspondem a altas frequências. Outra desvantagem prende-se à necessidade de se realizar uma análise modal aos resultados obtidos para a obtenção dos modos de vibração.

Shi et al. [13] sugerem um método para a localização de dano em estruturas com base na alteração da energia de deformação modal em cada elemento da estrutura, antes e após a presença de dano. A energia de deformação modal é também utilizada por *Kim et al.* [14] de forma a encontrar a dimensão geométrica do dano, verificando a fiabilidade e robustez do método para uma viga em regime livre-livre.

1.3.3 Uso de FRFs na Detecção de Dano

Uma FRF é um elemento da matriz de receptância $[H_{i,j}(\omega)]$ que contém toda a informação sobre as características dinâmicas da estrutura em estudo. Cada elemento da matriz H descreve a resposta dinâmica de uma coordenada i quando a estrutura é sujeita a uma força na coordenada j , com uma dada frequência. Então tem-se que:

$$H_{i,j}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)} \quad (1.3)$$

Investigadores na área do dano sugerem o estudo das FRFs em detrimento dos dados obtidos através da análise modal como as frequências naturais e os modos de vibração. *Wang et al.* [15] refere que existem vantagens em utilizar as FRFs uma vez que estas fornecem mais informação numa certa gama de frequências do que os dados obtidos pela análise dos modos de vibração, em que a informação fica limitada às frequências naturais.

Lin e Ewins [16] formularam um método de ajustamento de modelos estruturais que recorre a FRFs e que origina um conjunto de equações lineares. Os autores substituíram os GDL desconhecidos (não medidos) das FRFs experimentais pelos GDL analíticos homólogos e usaram um processo iterativo para resolver o sistema de equações. *Wang et al.* [15] utilizaram este método para detetar dano numa estrutura treliçada.

Park et al. [6] optaram por uma abordagem diferente com o intuito de minimizar a experimentação. Os autores sugerem um método de detecção de dano numa subestrutura, onde a análise de dano não é feita numa estrutura completa mas sim em várias subestruturas que a constituem.

Araujo dos Santos et al. [17] utilizaram uma metodologia de análise das sensibilidades das FRFs para a detecção de dano numa estrutura laminada e verificaram que a gama de frequências a estudar e o ponto de aplicação da excitação à estrutura são dois fatores críticos para o sucesso deste método.

De acordo com *Lee e Shin* [18] o dano é equivalente à redução do módulo de elasticidade do material constituinte da estrutura. O método destes autores baseou-se na redução do domínio do problema, onde as zonas intactas são excluídas da análise restando somente as zonas suspeitas de dano. Neste estudo, são referidas como vantagens o facto de serem usados os modos de vibração da estrutura sã e as FRFs da estrutura danificada. Porém, após testes efetuados com modelos numéricos, conclui-se que este

método permite a detecção de dano, desde que o ruído presente nas FRFs não ultrapasse um limite máximo, que corresponde a 9%.

Como foi referido em 1.3.1, alguns fatores externos, por exemplo ambientais, podem influenciar a resposta dinâmica de uma estrutura. *Limongelli* [19] desenvolveu um método para tentar verificar a influência do ruído e da temperatura num caso experimental numa ponte no Novo México. O método baseia-se na identificação de dano através da diferença entre o deslocamento medido num ponto e o deslocamento calculado através de uma função de interpolação para o mesmo local. Esta função é criada através da leitura de sensores dos deslocamentos registados em diversos locais da ponte. O autor concluiu que a temperatura não influencia os resultados, somente para níveis baixos de ruído.

Bovio et al. [20] estudaram a presença de dano de modo a obterem as dimensões do mesmo através dum indicador que avaliava as variações das FRFs ao longo da frequência. O indicador tem por base o quociente da média aritmética da diferença da FRF da estrutura sã e a FRF da estrutura com dano e a média aritmética da FRF da estrutura sã, para uma determinada gama de frequências.

1.3.4 Uso da Transmissibilidade na Detecção e Localização do Dano

As FTs foram primeiramente propostas como potencial ferramenta para detecção de dano por *Chen et al.* [21]. Desde então as FTs, têm sido extensivamente usadas por inúmeros investigadores em todo o Mundo para detecção e localização de dano.

Worden et al. [22] desenvolveram uma Rede Neuronal Artificial (RNA) que utiliza FTs para calcular um novo indicador para detecção de dano. O exemplo tratado numericamente foi um sistema massa-mola com 3 GDL. *Morais* [12] refere que as redes neuronais usam algoritmos complexos que conseguem adaptar-se à estrutura em análise. No entanto, é necessário serem submetidos a um processo de “aprendizagem” onde são fornecidos dados da experimentação já obtidos, de modo a treinar a RN. Posteriormente, esta está apta a funcionar, sendo apenas necessário introduzir dados experimentais e a rede fica apta a fornecer a localização e identificar o nível de dano.

Mais tarde, validações experimentais da utilização de FTs para detecção de dano [23-25] e sua localização [25] foram feitas usando dados obtidos através da análise de vibrações numa caixa de asa de avião e numa asa de avião *gnat*. A detecção foi baseada em três técnicas inovadoras diferentes, enquanto a localização foi baseada no uso de uma rede neural de perceção de várias camadas.

Além das FTs demonstrarem ter uma sensibilidade considerável no que diz respeito à detecção e localização de danos, a maior motivação para o uso das mesmas neste tipo de estudo é o facto de não ser necessário medir a excitação imposta à estrutura. No entanto, há que salientar que, nas estruturas que têm sido alvo de estudos (aplicações de aeronáutica, mecânica e civis) as FTs não dependem da

frequência de excitação, mas estão diretamente dependentes da localização (coordenadas) dessa mesma excitação. Uma mudança dessa localização causará diferenças significativas nas FTs, quer na estrutura sã, quer na estrutura danificada, não significando necessariamente que exista dano. Este tema foi recentemente discutido por *Devriendt et al.* [26] onde foi mostrado que a amplitude da transmissibilidade registada nas frequências naturais da estrutura depende da localização da excitação. Esta propriedade foi também usada para desenvolver técnicas de recolha de dados através de análise modal por *Devriendt e Guillaume* [27]. De modo a evitar com a variação das FTs devido a uma mudança da localização da excitação da estrutura, foi proposto que se restringisse o estudo das FTs numa gama de frequências próxima das frequências naturais da estrutura.

Nos estudos referidos acima, os autores usaram uma gama de frequências que acharam razoável para estudar as FTs. Um possível critério para a escolha de uma gama de frequências é que nessa gama existam o máximo de frequências naturais. No entanto, de acordo com *Worden et al.* [23] e *Manson* [28], para a localização de danos estruturais é possível encontrar uma gama de frequências muito específica que seja extremamente sensível à presença de dano. *Manson* [25] conclui que, para a localização de dano, é necessário encontrar uma gama de frequências que seja altamente sensível à presença de um tipo de dano e insensíveis a outros tipos. O problema é que essa gama “ideal” de frequências não é possível de ser determinada *a priori* sem ter acesso a dados da estrutura quando sujeita a diferentes condições e, na prática, esses dados raramente estão disponíveis. Este problema foi reconhecido e estudado por um grupo de investigadores na Universidade de Sheffield, *Worden et al.* [29] e *Papatheou et al.* [30], que propuseram o uso de pseudo-danos, sob a forma de massas adicionadas à estrutura em estudo, de modo a obter dados como se se tratasse de uma estrutura danificada. Apesar de esta abordagem ter resultado em alguns exemplos específicos, não há nenhuma prova da sua aplicação em qualquer tipo de estrutura.

Embora todos estes estudos mostrem, em exemplos específicos, a possibilidade de usar FTs para a deteção e localização de dano, eles não apresentam nenhum resultado que valide os mesmos. Apesar de ser relativamente simples de mostrar as sensibilidades das FTs à presença de dano (devido a serem obtidas através de um rácio entre as FRFs que são, geralmente, muito sensíveis à presença de dano), é extremamente difícil de se proceder à localização do mesmo através da utilização das funções de transmissibilidade.

Em paralelo aos estudos referidos, têm sido publicado desenvolvimentos semelhantes, usando FTs [31-35] de forma a realizar uma monitorização continua das condições de funcionamento de diferentes estruturas. Um indicador de dano baseado na integração entre as FTs obtidas com a estrutura sã e com a estrutura danificada, ao longo de uma gama de frequências, foi usado para detetar e localizar dano. A ideia subjacente é que o dano localizado entre dois pontos i e j causará alterações na FT obtida entre esses dois pontos e não (ou apenas uma alteração desprezável) nas FTs com os outros pontos. A aplicabilidade desta técnica foi avaliada usando dados experimentais registados em vigas, chapas e pás

de turbinas eólicas. Apesar deste método ter ficado provado nos exemplos estudados, não há também desenvolvimentos que permitam determinar a aplicabilidade desta técnica, até porque a gama de frequências específica para obter uma boa localização de dano não foi questionada.

Paralelamente a estas investigações, vários autores desenvolveram e publicaram diversos estudos analíticos sobre o conceito de transmissibilidade. Inicialmente, foram desenvolvidos estudos ora em sistemas com dois GDL, bem como em sistemas com vários GDL [33-35]. Em particular, no estudo de *Ribeiro et al.* [35], os autores demonstraram o facto de que quando se generaliza o conceito de transmissibilidade para sistemas com N GDL, a matriz de transmissibilidade depende da localização da excitação, como referido anteriormente. Além disso, é facilmente comprovável que os pólos e zeros das FTs correspondem aos zeros das FRFs registadas a partir de dois sensores.

Mottershead et al. [36] desenvolveram um estudo acerca da sensibilidade na alteração dos zeros referidos devido a mudanças na rigidez estrutural. Este estudo não mostra grande diferença na alteração nos polos e nos zeros das FRFs, no que diz respeito ao modelo numérico estudado, o que de certa forma contradiz as conclusões de outros autores, por exemplo de *Johnson et al.* [37]. Esta contradição pode mostrar que este assunto é bastante dependente do caso, portanto há que ter cuidado ao generalizar um resultado.

Com base nestes desenvolvimentos teóricos, a possibilidade de detetar e localizar danos usando FTs foi estudada por *Sampaio et al.* [38]. Foram analisadas as FTs registadas para uma estrutura sã e com a presença de dano e essa diferença foi então usada para a localização de dano, de forma semelhante ao método apresentado por *Zhang et al.* [39]. Os autores notaram que esta abordagem aparenta mostrar bons resultados a baixas frequências, mas, à medida que se vai alargando a gama de frequências, os resultados deterioram-se, levantando novamente a questão da gama de frequências que deve ser estudada. Na prática, os autores descobriram que se deve olhar especialmente para a diferença entre as FTs só até à primeira ressonância ou anti-ressonância, o que obviamente restringe a gama de frequências a usar no estudo. Outro estudo publicado por *Siebel et al.* [40] foca-se precisamente nos mesmos aspetos. Aqui foi estudado um sistema massa mola com 4 GDL em regime livre-livre e os autores concluíram que a localização exata do dano era apenas possível numa gama de frequências muito baixa, nomeadamente até à frequência que correspondia à primeira anti-ressonância da estrutura.

Mais recentemente, *Maia et al.* [41] sugeriram um indicador de dano alternativo. Este baseia-se em correlações (e não nas suas diferenças) entre as FTs correspondentes à estrutura sã e danificada, semelhante a um critério de correlação bastante conhecido que é usado em análise modal, o *Modal Assurance Criterion* (MAC). Este indicador foi proposto somente para responder ao problema da deteção de dano, deixando de parte a localização do mesmo. Os resultados demonstram uma maior sensibilidade na utilização das FTs em comparação com as FRFs. Apesar de este método parecer ser

eficiente nos exemplos numéricos estudados, é difícil avaliar a sua generalização para todas as diferentes abordagens que possam ser estudadas.

Paralelamente ao estudo desenvolvido por *Maia et al.* [41], o uso de FTs para a localização de dano foi também estudado por um grupo de investigadores na Universidade de Pardue, com base nos desenvolvimentos analíticos feitos em [34-36]. Para além do estudo de sistemas lineares, os autores estenderam o uso de FTs a sistemas não lineares. No caso dos sistemas lineares, a possibilidade de localização de dano é estudada num sistema massa mola numérico com três GDL, onde foi demonstrado que danos entre as duas massas causam uma mudança apenas na transmissibilidade entre essas duas massas. No entanto, é de notar que existem certas restrições quanto ao local da excitação para que este resultado seja válido. Apesar de este ser um dos raros estudos que faz uma tentativa de partir de expressões analíticas para demonstrar as propriedades de localização de dano através de FTs, os autores afirmam que este resultado pode ser generalizado para sistemas com mais GDL, mas não existe nenhum estudo a comprovar. Outros estudos foram feitos pelos mesmos investigadores nos quais aplicaram os seus conhecimentos numa estrutura do tipo armação em aço, num helicóptero por *Johnson et al.* [43] e nuns pneus por *Johnson et al.* [44]. Mais tarde, outro estudo realizado por *Kess et al.* [45] fala no tema da seleção da gama de frequências de modo a rejeitar a sua variabilidade devido a condições operacionais e ambientais, dando mais uma vez ênfase a este aspeto importante. Neste caso, para escolher uma gama de frequências mais propícia a bons resultados, volta a ser necessário a recolha de dados na estrutura danificada.

1.4 Estrutura da Dissertação

O presente trabalho é composto por cinco capítulos. Nesta secção será feita uma descrição sumária do conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 1 – Introdução. Neste capítulo é introduzido o tema, definido o objetivo, apresentados os estudos de inúmeros autores sobre o estudo da deteção e localização de dano utilizando as FRFs e FTs, bem como a estrutura da dissertação.

Capítulo 2 – Conceitos Teóricos. Neste capítulo são apresentados alguns conceitos essenciais para a realização deste trabalho. As FRFs, FTs e o MEF aplicado a treliças são aqui tratados.

Capítulo 3 – Modelo Numérico da Estrutura Linear. Neste capítulo é explicada a modelação numérica e tratamento de dados numa estrutura massa-mola linear com 4 G.D.L, bem como a utilização de um indicador de dano.

Capítulo 4- Modelo Numérico da Estrutura Treliçada. Neste capítulo é explicada a modelação numérica e o tratamento de dados em duas estruturas treliçadas distintas. Primeiro, um triângulo equilátero simples e posteriormente uma estrutura constituída por 5 nós e 7 elementos.

Capítulo 5 – Conclusões, onde é efetuada a discussão sumária dos resultados obtidos bem como apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

Anexos - Na parte final, apresenta-se um conjunto de anexos respeitantes aos resultados numéricos bem como alguns códigos desenvolvidos em *MatLab*.

2 Conceitos Teóricos

2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma revisão geral sobre os conceitos teóricos mais importantes para o desenvolvimento desta dissertação. Primeiramente é apresentado o conceito da Matriz de Receptância e como esta se relaciona com a Matriz de Rigidez Dinâmica. Posteriormente é explicado o conceito de Transmissibilidade com N GDL, em que são explicadas duas abordagens distintas da Matriz de Transmissibilidade e o conceito de Transmissibilidades Diretas. Por fim, é apresentado a utilização do MEF aplicado a estruturas treliçadas. Importa referir que, apesar do desenvolvimento destes conceitos poder ter por base sistemas amortecidos, em todas as simulações apresentadas nesta dissertação o amortecimento foi desprezado.

2.2 Modelo Baseado nas FRFs

As equações de equilíbrio dinâmico de um sistema complexo composto por N GDL e com amortecimento viscoso podem ser traduzidas por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.1)$$

em que $[M]$ representa a matriz de massa, $[K]$ a matriz de rigidez e $[C]$ a matriz de amortecimento, $\{x(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{\ddot{x}(t)\}$ representam os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração para cada instante t de tempo, e $\{f(t)\}$ descreve o vetor de força exterior aplicada.

No caso particular de uma excitação harmónica por um conjunto de forças aplicadas à mesma frequência, o vetor de força pode ser representado por:

$$\{f(t)\} = Fe^{i\omega t} \quad (2.2)$$

Assim, a resposta do sistema será também harmónica e em regime estacionário, no domínio da frequência, é dada por:

$$\{x(t)\} = Xe^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Introduzindo as equações (2.2), (2.3) e, conseqüentemente, rearranjando a equação (2.1), a relação entre a resposta e a excitação para uma dada frequência é descrita por:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{X\} = \{F\} \quad (2.4)$$

Então, a relação entre a resposta X e a excitação F no domínio da frequência é descrita como:

$$\{X\} = ([K] - \omega^2[M] + i\omega[C])^{-1} \cdot \{F\} = [H(\omega)] \cdot \{F\} \quad (2.5)$$

Em que:

$$[H(\omega)] = ([K] - \omega^2[M] + i\omega[C])^{-1} \quad (2.6)$$

É designada por matriz de receptância, contendo informação sobre as características dinâmicas do sistema, sendo definida pelo quociente entre o deslocamento verificado na coordenada i devido a uma força aplicada na coordenada j da estrutura a uma dada frequência ω , conforme demonstra a equação (1.3).

A receptância $[H(\omega)]$ está diretamente relacionada com a rigidez dinâmica, sendo:

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} \quad (2.7)$$

Na análise experimental, cada FRF é calculada através de medições diretas ou indiretas, através de acelerómetros, na estrutura, fazendo a divisão entre a resposta registada no acelerómetro (aceleração) e a excitação (força) aplicada em qualquer ponto da estrutura.

2.3 Conceito de Transmissibilidade para Sistemas com N GDL

Segundo *Maia et al.* [46] o conceito de transmissibilidade está presente em qualquer bibliografia clássica acerca de vibrações mecânicas. Geralmente é associado a sistemas de 1 grau de liberdade quando este possui um movimento harmónico. É definido como o rácio entre o módulo da amplitude da resposta e o módulo da amplitude do movimento imposto ao sistema.

A questão que se coloca é como estender o conceito de transmissibilidade para um sistema com N GDL, ou seja, como relacionar um conjunto de respostas desconhecidas com um outro conjunto de respostas conhecidas, para um dado conjunto de forças aplicadas, ou até mesmo avaliar um conjunto de forças de reação a partir de um conjunto de forças aplicadas ao sistema. Segundo estes autores, uma aplicação onde as transmissibilidades são bastante interessantes é quando na prática é impossível medir a resposta em algumas coordenadas da estrutura. Se a transmissibilidade for estudada previamente através de um modelo numérico ou em ambiente laboratorial, é então possível estimar a resposta em coordenadas da estrutura que não estejam acessíveis para uma medição direta.

Para sistemas com N GDL a definição de transmissibilidade, tal como acontece para sistemas com 1 GDL, é a razão entre os módulos da amplitude de respostas do sistema.

A equação (2.5) define a relação entre um conjunto de forças aplicadas e a resposta do sistema.

Ribeiro et al. [35] referem que o conceito de transmissibilidade parte de relações entre as respostas do sistemas e as forças aplicadas associadas com a matriz da receptância, ou FRFs. Importa, então, definir um vetor (ou conjunto) de coordenadas onde forças harmónicas são aplicadas ao sistema, definindo-se essas coordenadas como coordenadas A. Definindo o vetor F_A como o vetor que representa a magnitude das forças aplicadas ao sistema nas coordenadas A, o vetor X_U como o vetor das amplitudes de respostas nas coordenadas desconhecidas U e por fim um vetor X_K como o vetor das amplitudes de respostas nas coordenadas medidas K, tal como mostra a Figura 2.1

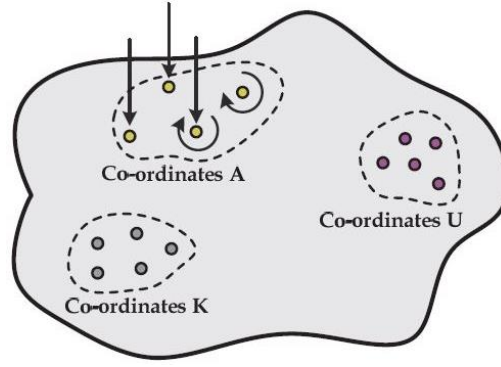


Figura 2.1 Sistema Representativo das Coordenadas A, U e K [46]

Assim, podem estabelecer-se as seguintes relações:

$$\{X_U\} = [H_{UA}]\{F_A\} \quad (2.8)$$

$$\{X_K\} = [H_{KA}]\{F_A\} \quad (2.9)$$

onde $[H_{UA}]$ e $[H_{KA}]$ definem as matrizes de receptância que relacionam as coordenadas U e A, e K e A, respetivamente. Eliminando o vetor $\{F_A\}$, presente nas equações (2.8) e (2.9), pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\{X_U\} = [H_{UA}][H_{KA}]^+ \{X_K\} \quad (2.10)$$

obtendo-se assim uma equação que relaciona dois conjuntos distintos de respostas, o conjunto das respostas desconhecidas com o conjunto das respostas conhecidas. Esta relação é descrita por:

$$\{X_U\} = [T_{UK}^{(A)}]\{X_K\} \quad (2.11)$$

onde $[H_{KA}]^+$ é a matriz pseudoinversa de $[H_{KA}]$. Então, a matriz transmissibilidade é dada por:

$$[T_{UK}^{(A)}] = [H_{UA}][H_{KA}]^+ \quad (2.12)$$

O conjunto de coordenadas A onde a excitação é aplicada não tem que coincidir com o conjunto de coordenadas K onde as respostas são medidas. A única restrição que existe para que seja possível calcular $[H_{KA}]^+$ é que o número de coordenadas conhecidas K seja maior ou igual que o número de

coordenadas A. Assim, a equação (2.12) define a matriz transmissibilidade entre as coordenadas U e K para uma excitação imposta à estrutura no conjunto de coordenadas A.

A matriz de transmissibilidade referida tem a particularidade de não depender da magnitude das forças aplicadas à estrutura. O que importa é escolher as coordenadas onde a excitação será efetuada e medir as FRFs necessárias.

A partir da equação (2.7), sabe-se que o comportamento dinâmico de uma estrutura com N GDL, quando excitada harmonicamente, pode ser descrito pela seguinte equação:

$$[Z(\omega)]\{X\} = \{F\} \quad (2.13)$$

onde $[Z(\omega)]$ representa a matriz de rigidez dinâmica, $\{X\}$ o vetor das amplitudes das respostas dinâmicas e $\{F\}$ o vetor das amplitudes das forças dinâmicas impostas à estrutura.

A partir do conjunto de respostas dinâmicas é então possível distinguir dois subconjuntos de coordenadas conhecidas e desconhecidas, K e U, respetivamente. A partir do conjunto de forças dinâmicas impostas à estrutura é também possível diferenciar dois subconjuntos A e B, onde A é o subconjunto onde as excitações dinâmicas são aplicadas e B o conjunto constituído pelas restantes coordenadas onde as excitações não são aplicadas.

Assim, pode-se definir X e F como:

$$[X] = \begin{Bmatrix} X_K \\ X_U \end{Bmatrix} \text{ e } [F] = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Com a existência destes subconjuntos, a equação (2.13) pode ser particionada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{AK} & Z_{AU} \\ Z_{BK} & Z_{BU} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_K \\ X_U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Desenvolvendo o cálculo matricial, pode-se escrever que:

$$[Z_{AK}]\{X_K\} + [Z_{AU}]\{X_U\} = \{F_A\} \quad (2.16)$$

$$[Z_{BK}]\{X_K\} + [Z_{BU}]\{X_U\} = \{F_B\} \quad (2.17)$$

Tendo em conta que as coordenadas B representam as coordenadas onde não são aplicadas as forças dinâmicas e considerando que o número dessas coordenadas é maior ou igual que o número de coordenadas U, a partir da equação (2.17) é possível obter o vetor das respostas desconhecidas U:

$$\{X_U\} = -[Z_{BU}^+][Z_{BK}]\{X_K\} \quad (2.18)$$

em que $[Z_{BU}]^+$ é a matriz pseudoinversa de $[Z_{BU}]$. Assim, também é correto definir a matriz de transmissibilidade que relaciona conjuntos de respostas dinâmicas desconhecidas e conhecidas, com base nas matrizes de rigidez dinâmica correspondentes:

$$[T_{UK}^{(A)}] = -[Z_{BU}^+][Z_{BK}] \quad (2.19)$$

Tendo em conta que a matriz de rigidez dinâmica, para sistemas não amortecidos, é descrita em termos da matriz de rigidez e matriz de massa $[Z] = [K] - \omega^2[M]$, é possível então relacionar as funções de transmissibilidade com as propriedades físicas do sistema. Para que tudo isto seja possível é obrigatório que o número de GDL nas coordenadas seja:

$$\#B \geq \#U \text{ e } \#K \geq \#A$$

A equação (2.19) é uma definição alternativa do conceito de transmissibilidade, baseada agora na matriz de rigidez dinâmica da estrutura. A matriz de transmissibilidade obtida através da equação (2.12) é exatamente a mesma, mas desta vez com base na matriz de receptância, ou FRFs.

Assim, tem-se que:

$$[T_{UK}^{(A)}] = [H_{UA}][H_{KA}^+] = -[Z_{BU}^+][Z_{BK}] \quad (2.20)$$

Por outro lado, se forem divididas duas quaisquer respostas pode-se renomeá-las de transmissibilidades diretas. Assim, diversas transmissibilidades podem ser obtidas. No entanto estas transmissibilidades dependem não só da localização, mas também das magnitudes das forças aplicadas.

Ao dividir-se a equação (2.20) por um vetor de resposta num dado GDL conhecido, $\{X_S\}$, tem-se que:

$$\{X_U\} / \{X_S\} = [T_{UK}^{(A)}]\{X_K\} / \{X_S\} \Rightarrow \{\tau_{US}\} = [T_{UK}^{(A)}]\{\tau_{KS}\} \quad (2.21)$$

Através de um modelo analítico apresentado abaixo, percebe-se esta definição. Consideremos então X_U , X_K e F_A dados respetivamente por:

$$X_U = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad X_K = \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \quad F_A = \begin{Bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

A relação entre X_U e X_K seria:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= T_{13}X_3 + T_{14}X_4 \\ X_2 &= T_{23}X_3 + T_{24}X_4 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dividindo a equação (2.23) por X_3 , tem-se que:

$$\begin{aligned} X_1 / X_3 &= T_{13} + T_{14}X_4 / X_3 & \tau_{13} &= T_{13} + T_{14}\tau_{43} \\ X_2 / X_3 &= T_{23} + T_{24}X_4 / X_3 & \tau_{23} &= T_{23} + T_{24}\tau_{43} \end{aligned} \quad (2.24)$$

O mesmo caso também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= H_{15}F_5 + H_{16}F_6 \\ X_3 &= H_{35}F_5 + H_{36}F_6 \end{aligned} \Rightarrow \tau_{13} = \frac{X_1}{X_3} = \frac{H_{15}F_5 + H_{16}F_6}{H_{35}F_5 + H_{36}F_6} \quad (2.25)$$

A partir da equação (2.25) é perceptível que a transmissibilidade direta τ_{13} depende da magnitude das forças F_5 e F_6 . Só no caso em que apenas uma força é aplicada é que há coincidência entre as duas formulações de transmissibilidades diretas descritas pelas equações (2.24) e (2.25).

A partir da equação (2.24) é possível calcular τ_{13} e τ_{23} a partir de τ_{43} e substituindo τ_{43} em ambas as parcelas da equação é possível estabelecer uma relação entre τ_{13} e τ_{23} , permitindo assim a avaliação de uma delas a partir da outra.

Generalizando agora para o caso onde apenas uma força é aplicada na coordenada m e apenas duas coordenadas, i e j forem relacionadas, obtém-se que:

$$\tau_{ij} = T_{ij} = \frac{X_i}{X_j} = \frac{H_{im}}{H_{jm}} \quad (2.26)$$

2.4 Método dos Elementos Finitos Aplicado a Treliças

De acordo com *Cardoso e Coelho* [48], a criação de modelos de fenômenos físicos é uma das atividades importantes da Engenharia. Praticamente todos os fenômenos da natureza podem ser descritos pelas leis da física e modeladas através de equações algébricas, diferenciais ou integrais relacionando as várias quantidades que os caracterizam.

Devido ao avanço tecnológico registrado nas últimas décadas, com a introdução de computadores cada vez mais avançados e o com o desenvolvimento de muitos métodos matemáticos e numéricos, é agora possível resolver diversos problemas práticos de Engenharia. Segundo os mesmos autores, simulação numérica tem como definição o uso de um método numérico e de um computador para avaliar o modelo matemático de um fenômeno físico e estimar as suas características.

Um dos métodos numéricos mais comum é o MEF que é uma ferramenta poderosíssima na análise e resolução de problemas de Engenharia. Este método, permite entre outros, a análise de tensões e deformações, análise de vibrações ou análise de transmissão de calor. Existem dois outros métodos bastante usados em Engenharia, o Método dos Volumes Finitos e o Método das Diferenças Finitas.

Neste estudo será feita uma aproximação a um modelo de treliça em que os nós da mesma funcionarão como nós articulados, ou seja, não há transmissão de momentos. Assim, apesar de ser possível a aplicação de forças, quer nas direções axial, quer na transversal, os seus elementos apenas trabalham à tração/compressão, tal como é verificado na Figura 2.2. Assim, cada elemento possui apenas GDL axial onde as deformações estruturais verificadas na treliça se devem somente à diminuição (compressão) ou aumento (tração) do comprimento dos seus elementos.

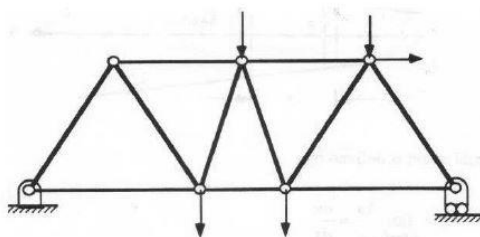


Figura 2.2 Exemplo de Estrutura Treliçada [49]

O elemento viga permite liberdade segundo três direções em cada nó, os deslocamentos x e y e as rotações em torno de z , como é apresentado na Figura 2.3.

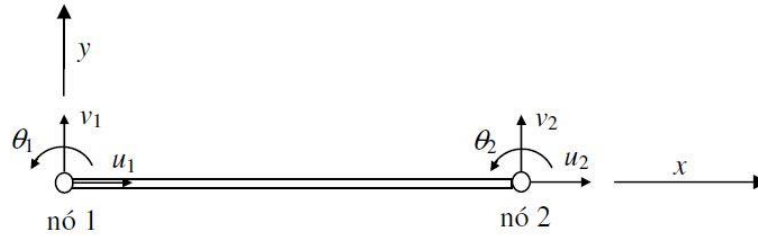


Figura 2.3 Elemento Viga [48]

As matrizes de rigidez e de massa do elemento viga são dadas respetivamente por:

$$[K_l] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad [M] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ 0 & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix}$$

No entanto, no elemento barra a rigidez axial depende somente do termo $\frac{EA}{L}$. Além disso, como é possível observar na Figura 2.4, cada elemento barra tem apenas 2 GDL. Assim, é fácil perceber que a matriz de rigidez deste elemento é dada por:

$$[K_l] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad [M] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, para este estudo considerar-se-á o elemento barra que apenas possui GDL axial em cada nó do elemento, como é demonstrado na Figura 2.4.

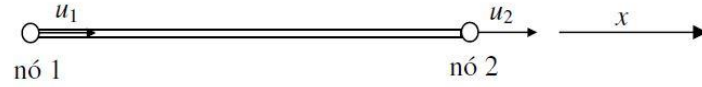


Figura 2.4 Elemento Barra [48]

Segundo *Silva e Kawano* [49] a matriz de massa acima referida pode-se designar como matriz de massa consistente. No entanto, existe uma formulação mais intuitiva da matriz massa, chamada matriz de massa concentrada, dada por:

$$[M] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo os mesmos autores, esta matriz é obtida aproximando o elemento que constitui a treliça a um sistema massa-mola como apresentado na Figura 2.5. Porém, trata-se de uma aproximação que é usada somente quando o objetivo é reduzir o custo computacional da análise.

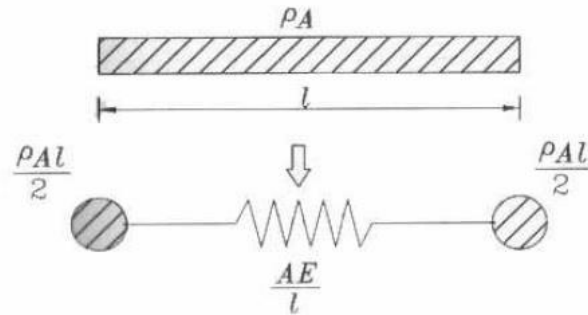


Figura 2.5 Aproximação a um sistema Massa-Mola [49]

No entanto, apesar do elemento da treliça sofrer apenas deformação axial, os seus nós podem sofrer deslocamentos nas direções X e Y, num sistema de coordenadas global. Assim, o vetor U de deslocamento é dado por:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix}^T$$

A matriz de rigidez é então definida como:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A formulação apresentada admite que um dado elemento que constitui a treliça está alinhado com um dos eixos coordenados. No entanto, os elementos podem estar dispostos de forma triangular englobados num sistema cartesiano global XY, como mostrado na Figura 2.6.

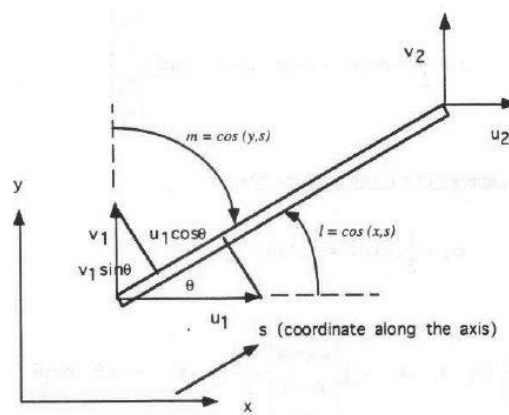


Figura 2.6 Sistema Cartesiano Global XY [49]

Assim, quer a matriz de rigidez, quer a matriz de massa, têm que ser escritas em função de um sistema de coordenadas global. Para tal, deverá ser efetuada a transformações das coordenadas entre os sistemas global e local. A matriz de transformação de coordenadas é dada por, em que θ é o ângulo de orientação do elemento no sistema global:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de rigidez no sistema global de coordenadas é dada por:

$$[K_G] = [T]^T [K_l] [T] \quad (2.27)$$

Importa referir que o mesmo procedimento de transformação de coordenadas tem que ser feito para a matriz de massa.

3 Modelo Numérico da Estrutura Linear

Este capítulo inicia-se com a apresentação da modelação numérica de uma estrutura massa-mola com 4 GDL, sendo especificadas sumariamente algumas tentativas de modelação até chegar ao modelo final. De seguida será descrita a recolha dos dados obtidos no *software MatLab* e a sua utilização em Excel. Para finalizar será apresentado o ID que é transversal a esta dissertação, algumas das suas características e as conclusões acerca da sua capacidade na deteção e localização de dano.

3.1 Introdução

Como já foi referido, a modelação numérica para a presente dissertação foi realizada utilizando o *software MATLAB*. O modelo de elementos finitos reproduz uma estrutura linear semelhante à estudada por *Siebel et al.* [40], sendo constituída por 4 nós e 3 elementos barra.



Figura 3.1 Estrutura Linear [40]

O intuito deste estudo introdutório foi perceber o comportamento e a evolução das FRFs, FTs e do ID numa estrutura composta por elementos barra quando na presença de dano.

A Tabela 3.1 apresenta todas as propriedades materiais e geométricas consideradas relevantes para o presente trabalho.

Tabela 3.1 Dados de cada elemento da estrutura simulada numericamente

Dados	Valor
Área da secção transversal (A)	$2 \times 50mm^2$
Comprimento de cada elemento (L)	$300mm$
Densidade do material (ρ)	$7860kg / m^3$
Segundo momento de área (I_{zz})	$2.083 \times 10^{-8} mm^{-4}$
Módulo de Young (E)	$210GPa$
Massa	$0.2358kg$

As propriedades espaciais da estrutura foram caracterizadas através das suas matrizes de massa e rigidez de cada elemento barra dadas por:

$$M = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Após a assemblagem das matrizes de cada elemento, obteve-se a matriz de massa global e outra matriz de rigidez global que caracterizam assim toda a estrutura. Ambas as matrizes são quadradas têm a dimensão 4X4 e são dadas por:

$$[M] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{2EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{2EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Utilizando o *software MatLab* para resolver o problema de valores e vetores próprios obtiveram-se as frequências naturais e os respetivos modos de vibração da estrutura completa. Surgiram quatro frequências naturais, sendo que três delas estão associadas a modos de vibração flexíveis da estrutura e uma outra a um modo de corpo rígido. Este modo caracteriza-se, tal como o seu nome indica, pela ausência de deslocamento relativo entre as coordenadas da estrutura. Pode-se fazer a analogia com o simples ato de desviar um móvel de sítio ou mesmo o deslocamento de uma carruagem de comboio, ou seja, todos os pontos, quer do móvel, quer da carruagem, dirigem-se no mesmo sentido e à mesma amplitude.

Tabela 3.2 Frequências Naturais da Estrutura

Frequências Naturais	Valor (Hz)
Freq. Corpo Rígido	9.97×10^8
1º Frequência	3003.9
2º Frequência	6717.0
3º Frequência	9499.2

Como já foi referido anteriormente, o elemento barra caracteriza-se por apresentar somente deslocamento axial. Assim, facilmente se percebe que todos os modos de vibração desta estrutura representam somente deslocamentos axiais nos diversos nós da mesma.

Os dados da estrutura descritos na Tabela 3.1 foram escolhidos de forma a tentar simular numericamente uma estrutura com dimensões e características possíveis de ser reproduzida em ambiente laboratorial. Para este estudo não interessa a ordem de grandeza das frequências naturais mas sim o modo como o comportamento da estrutura poderá ser afetado devido à presença de dano. Assim, trabalhar numa ordem de grandeza de 10 Hz ou 10000 Hz não fará qualquer diferença.

Chegou-se então à conclusão que o ideal seria substituir a modelação numérica da estrutura constituída por três elementos barra por um sistema massa-mola com 4 graus de liberdade axiais, como é mostrado na Figura 3.2.

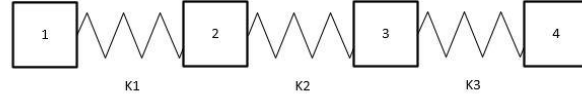


Figura 3.2 Sistema Massa-Mola com 4 GDL

3.2 Sistema Massa-Mola

Ao estudar o sistema massa-mola com quatro massas e três molas (Figura 3.2) consegue-se estabelecer o paralelismo perfeito entre este sistema e a estrutura demonstrada na Figura 3.1. No presente trabalho foi utilizada uma metodologia idêntica à de *Siebel et al.* [40]. As constantes de rigidez das molas e as massas discretas foram escolhidas de modo a que a última frequência natural da estrutura fosse no máximo de 10 Hz, de modo a fazer-se todo este estudo numa gama entre 0 a 12 Hz. Assim a rigidez de cada mola foi de $1000N/m$ e a massa foi de $1Kg$ para cada bloco.

As propriedades espaciais da estrutura foram assim caracterizadas através das suas matrizes de massa e rigidez dadas por:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 1000 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Utilizando o *software MatLab* para resolver o problema de valores e vetores próprios obtiveram-se as frequências naturais da estrutura massa mola. Tal como tinha acontecido na estrutura linear com três elementos barra mencionada na Secção 3.1 surgiram quatro frequências naturais, sendo que três delas correspondem a modos de vibração flexíveis e uma outra a um modo de corpo rígido, que vem acentuar o paralelismo entre estes dois sistemas.

Tabela 3.3 Frequências Naturais do Sistema Massa Mola

Frequências Naturais	Valor (Hz)
Freq. Corpo Rígido	9.63×10^{-6}
1º Frequência	3.85
2º Frequência	7.12
3º Frequência	9.29

3.2.1 Modelação do Dano e Respetivo Indicador

De modo a simular dano estrutural, a rigidez de cada uma das três molas foi reduzida em 50%, embora neste trabalho apenas uma mola, de cada vez, tenha sido danificada, de modo a tentar obter uma deteção e localização de dano mais simples. Consequentemente a matriz de rigidez global da estrutura sofreu alterações consoante a localização da diminuição da rigidez axial. Em baixo serão apresentadas as matrizes de rigidez global da estrutura para os estados de dano em K1, K2 e K3, respetivamente.

Matriz de rigidez com a mola K1 danificada:

$$[K_{1d}] = \begin{bmatrix} 500 & -500 & 0 & 0 \\ -500 & 1500 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 1000 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz de rigidez com a mola K2 danificada:

$$[K_{2d}] = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 1500 & -500 & 0 \\ 0 & -500 & 1500 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 1000 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz de rigidez com a mola K3 danificada:

$$[K_{3d}] = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 1500 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

É de referir que a matriz de massa global do sistema não sofre qualquer tipo de alteração devido à presença de dano, pois este é introduzido nas molas e não nas massas.

Como foi referido anteriormente, as frequências naturais de uma estrutura estão diretamente dependentes de alterações de rigidez estrutural, tal como mostra a equação (1.1). Assim, é de esperar que as frequências naturais da estrutura danificada em uma das molas sejam diferentes das frequências da estrutura sem qualquer tipo de dano. Na Tabela 3.4 estão contidas todas as frequências, da estrutura sã, e danificada em K1, K2 e K3.

Tabela 3.4 Frequências naturais da Estrutura com e sem dano

Frequências Naturais (Hz)	Estrutura sã	Dano K1	Dano K2	Dano K3
Freq. Corpo Rígido	9.63×10^{-7}	4.62×10^{-8}	5.26×10^{-7}	4.62×10^{-8}
1º Frequência	3.85	3.37	3.11	3.37
2º Frequência	7.12	6.01	7.12	6.01
3º Frequência	9.29	8.89	8.14	8.89

É de notar que os valores das frequências naturais da estrutura são exatamente os mesmos quer o dano esteja em K1 ou em K3. Apesar de os valores das frequências serem idênticos, os respetivos modos de vibração são simétricos. Esta semelhança de valores acontece devido à homogeneidade estrutural e à simetria na localização do dano. Na Tabela 3.5 serão apresentados os modos de vibração da estrutura, de modo a confirmar as suas diferenças.

Tabela 3.5 Modos de Vibração com Dano em K1 e K3

	Dano K1				Dano K3			
	1º Freq	2º Freq	3º Freq	4º Freq	1º Freq	2º Freq	3º Freq	4º Freq
Nó 1	-0.50	0.77	0.38	-0.09	-0.50	-0.55	0.56	-0.36
Nó 2	-0.50	0.08	-0.69	0.51	-0.50	-0.30	-0.24	0.78
Nó 3	-0.50	-0.30	-0.24	-0.78	-0.50	0.08	-0.69	-0.51
Nó 4	-0.50	-0.55	0.56	0.36	-0.50	0.77	0.38	0.09

É de notar que a 1º frequência na Tabela 3.5 corresponde à frequência de corpo rígido.

Indicador de Dano (ID)

A sensibilidade das FTs à presença de dano foi analisada através do mesmo ID utilizado por *Siebel et al.* [40] e por *Feng et al.* [50].

$$ID_{kmn} = \frac{\sum_{\Omega=\Omega_{\min}}^{\Omega_{\max}} |\log(FT_{kmn}^d(\Omega)) - \log(FT_{kmn}(\Omega))|}{\sum_{\Omega=\Omega_{\min}}^{\Omega_{\max}} |\log(FT_{kmn}(\Omega))|} \quad (3.1)$$

em que k é a coordenada onde a excitação é efetuada, m e n são as coordenadas onde as respostas da estrutura sujeita a excitação são medidas.

Este indicador tem a particularidade de permitir o estudo da sensibilidade das FT's numa gama de frequências determinada. Poderá ser feito um estudo com uma gama de frequências que comece em zero e termine depois da última frequência natural da estrutura (que corresponde á metodologia principal utilizada neste trabalho), mas também permite estudar uma gama de frequências que inclua somente uma, duas, ou mais frequências naturais. No fundo, os autores de cada trabalho podem escolher uma janela de frequências que considerem a mais correta. Esta questão da escolha da gama de frequência será um fator preponderante nos resultados da localização de dano, como se verá na Secção 3.2.4.

3.2.2 Simulação Numérica das Vibrações Axiais

No presente trabalho a detecção e localização de dano teve por base a excitação e medição de vibrações somente na direção axial, tal como já foi explicado anteriormente. Foram investigados quatro cenários de excitação distintos: uma excitação na coordenada 1 e assim sucessivamente até à coordenada 4. Tal como no caso da introdução de dano estrutural, foi considerada apenas a excitação numa coordenada de forma a obter respostas em qualquer uma das quatro coordenadas. O mesmo procedimento repetiu-se para a excitação nas coordenadas 2, 3 e 4. As FTs foram então calculadas a partir da medição de respostas (mais concretamente das FRFs) em cada um dos seus nós adjacentes. Por exemplo, a transmissibilidade entre as coordenadas 1 e 2, FT_{1-2} , foi calculada a partir das respostas medidas nas coordenadas 1 e 2. Para calcular a Função de Transmissibilidade entre as coordenadas 1 e 2, como referido anteriormente, tem que se ter em conta a coordenada onde a excitação efetuada. No caso deste sistema existem quatro FT_{1-2} , consoante a excitação seja efetuada na coordenada 1, 2, 3 ou 4.

Neste trabalho foram utilizadas sempre Transmissibilidade Diretas. Assim, para calcular a FT_{1-2} com a excitação na coordenada 1 é necessário conhecer $H_{1,1}$ e $H_{2,1}$, que representam, de acordo com a equação (1.3), a resposta na coordenada 1 e 2 devido à excitação na coordenada 1, respetivamente. Conhecidas estas duas FRFs, recorre-se à equação (2.26) para calcular FT_{1-2} . Assim:

$$\tau_{12} = \frac{H_{1,1}}{H_{2,1}} \quad (3.2)$$

No caso de se tratar da estrutura danificada, o procedimento é o mesmo, independentemente da localização do dano. Escrevendo a equação (3.2) para a estrutura com dano, tem-se:

$$\tau_{12}^d = \frac{H_{1,1}^d}{H_{2,1}^d} \quad (3.3)$$

em que H_{ij}^d representa a resposta obtida na estrutura danificada.

Para todas as restantes FTs representadas nesta dissertação, o procedimento de cálculo é análogo.

Foram estudados quatro cenários de excitação axial em cada um dos quatro nós do sistema. Para cada excitação efetuada foram obtidas respostas em todos os nós e as FTs utilizadas foram sempre calculadas pelo quociente das FRFs dos seus nós adjacentes. Como referido anteriormente, todo este estudo foi efetuado para três distintas localizações de dano.

A relação entre as respostas obtidas através da análise de vibrações axiais em cada nó da estrutura (sã e danificada) é ilustrada na Figura 3.3. O caso analisado é a presença de dano em K1 e a excitação efetuada no primeiro nó do sistema. A gama de frequências analisada é de 0-12Hz de modo a englobar todas as frequências naturais da estrutura (em 3.2.4 é analisada e explicada a influência da gama de frequências a utilizar na análise dos dados).

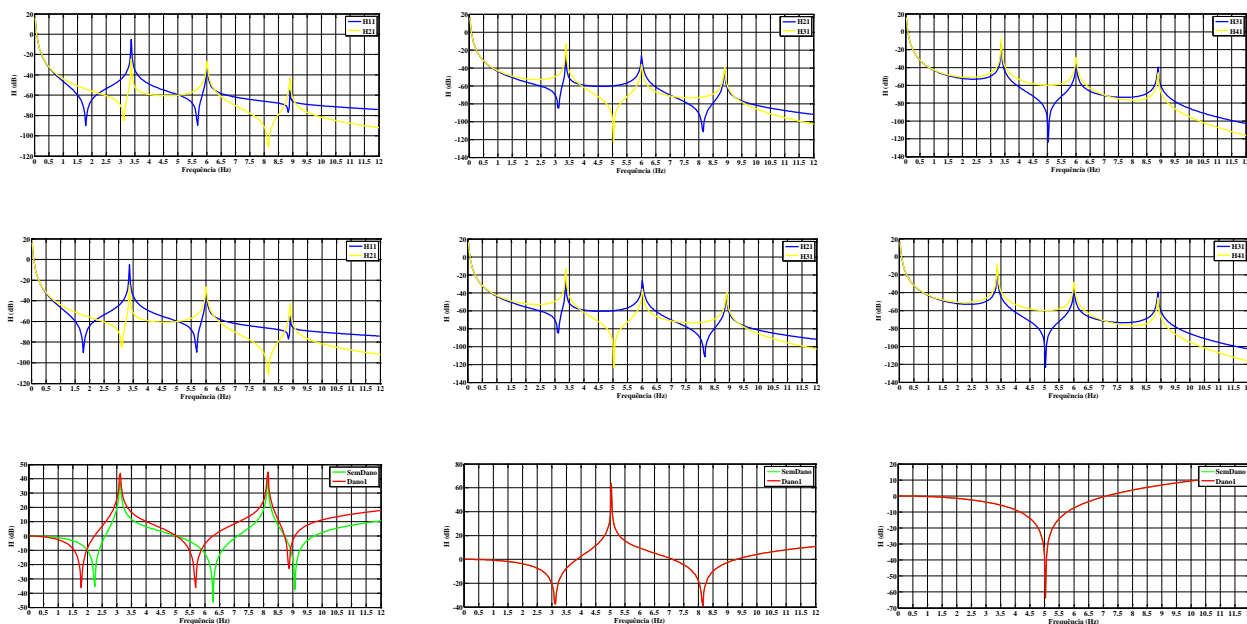


Figura 3.3 Excitação axial no nó 1, dano em K1. FRFs para cada elemento s/dano (1ª linha), FRFs para cada elemento c/dano (2ª linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3ª linha).

A primeira linha de imagens mostra as FRFs obtidas em cada nó da estrutura sã. Cada uma das três imagens da primeira linha contém o par de FRFs necessárias para calcular a FT para o elemento que contem os nós onde são obtidas as respostas. Assim, na primeira coluna estão representadas as FRFs correspondentes aos nós 1 e 2 e FT entre esses dois nós. O procedimento é análogo para a coluna 2 e três. A segunda linha da figura mostra as FRFs obtidas com a estrutura danificada em K1. A partir da Figura 3.3 observa-se, que devido à presença de dano, as anti-ressonâncias da FRF do nó 1 registaram diferenças significativas em baixas frequências, enquanto que as respostas obtidas nos nós do segundo e terceiro elemento não registaram grandes alterações. As alterações registadas nas anti-ressonâncias das FRFs dos nós 1 e 2 refletem-se através de uma ligeira alteração nos zeros da FT, como é demonstrado através da terceira linha da figura.

As alterações observadas nas FTs calculadas para uma estrutura sã e uma estrutura danificada manifestam-se a frequências em que existem alterações das anti-ressonâncias das FRFs que constituem a FT. Segundo *Siebel et al.* [40] este exemplo ilustra um comportamento ideal do algoritmo de deteção

de dano utilizando Funções de Transmissibilidade, devido às diferenças registadas nas FTs antes e após a presença de dano.

Na Tabela 3.6 são mostrados os resultados do ID para cada localização do mesmo, com a excitação axial localizada no nó 1 da estrutura e uma gama de frequências analisada entre 0-12 Hz. A primeira linha contém os IDs de cada elemento para um dano localizado em K1. É possível observar que a alteração dos zeros verificada na FT entre os nós 1 e 2 é refletida pelo alto ID registado no elemento 1, em contraste com o registado nos elementos 2 e 3, em que, como se viu anteriormente na Figura 3.3, não se verificaram alterações nos zeros das FTs desses elementos. Assim, o dano presente no elemento 1 é claramente identificado e localizado. No entanto, os resultados dos indicadores para o cenário de dano em K2 e K3 não revelam uma clara e correta deteção e localização de dano. Verificam-se valores elevados de ID, não só o DI do elemento danificado, mas também para os IDs dos elementos localizados entre a presença de dano e a coordenada de excitação. Então, a presença de dano no elemento 2 não é detetável. No caso em que o dano está presente no elemento 3, a sua deteção não é clara, pois o ID registado no elemento 3 para este cenário não é suficientemente destacável em relação aos restantes IDs registados nos outros elementos para que se possa concluir uma correta localização.

Tabela 3.6 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 1 (0-12 Hz)

Excitação nó 1	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.465	1.06E-10	1.24E-10
Dano K2	0.474	0.444	1.09E-10
Dano K3	0.513	0.544	0.553

Considerando agora a excitação axial presente no nó 2 da estrutura, na mesma gama de frequências do caso anterior, a Tabela 3.7 mostra que os IDs revelam um comportamento semelhante ao registado na Tabela 3.6. O elemento 1 e 2, que são adjacentes à coordenada de excitação têm IDs suficientemente mais elevados do que os restantes, o que permite identificar o elemento que está danificado. No entanto, quando o elemento 3 contém o dano estrutural, o ID registado no Elemento 3 não é suficientemente mais elevado do que o registado no elemento 2 para que se possa afirmar uma correta localização do dano. Apenas se pode concluir que existe dano, mas não se conclui acerca da sua localização.

Tabela 3.7 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 2 (0-12 Hz)

Excitação nó 2	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.514	1.07E-10	1.02E-10
Dano K2	1.13E-10	0.444	1.23E-10
Dano K3	1.02E-10	0.544	0.553

Nas Tabelas 3.8 e 3.9 estão representados os IDs para as condições de excitação nas coordenadas 3 e 4, respetivamente. Estas refletem um comportamento em tudo idêntico ao referido anteriormente, em que os elementos adjacentes ao nó excitado são onde a localização de dano é feita de uma forma mais evidente. É de salientar que a simetria estrutural do sistema em estudo é também refletida nos dados contidos nestas quatro tabelas.

Tabela 3.8 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 3 (0-12 Hz)

Excitação nó 3	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.514	0.531	1.03E-10
Dano K2	1.23E-10	0.444	1.13E-10
Dano K3	1.24E-10	1.07E-10	0.514

Tabela 3.9 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 4 (0-12 Hz)

Excitação nó 4	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.553	0.551	0.514
Dano K2	1.09E-10	0.444	0.474
Dano K3	1.24E-10	1.06E-10	0.465

Calculados todos os indicadores de dano calculados para esta estrutura, é agora pertinente observar a evolução das FRFs e das FTs para o caso em que o dano estrutural não é localizado de uma forma correta.

Anteriormente apresentaram-se as FRFs e as FTs para o caso em que o dano está presente no elemento 1 e a excitação era feita no nó 1, o que revelou ser um caso ideal para uma correta localização de dano, tal como é visível na primeira linha da Tabela 3.6. Na Figura 3.4 será apresentado o caso em que a excitação é efetuada no nó 2 e o dano está presente no elemento 3 (3ª linha da Tabela 3.7). Uma análise breve aos ID da referida linha da Tabela 3.7 permite constatar que a localização do dano é inconclusiva, ficando a dúvida se o dano está presente no elemento 2 ou 3.

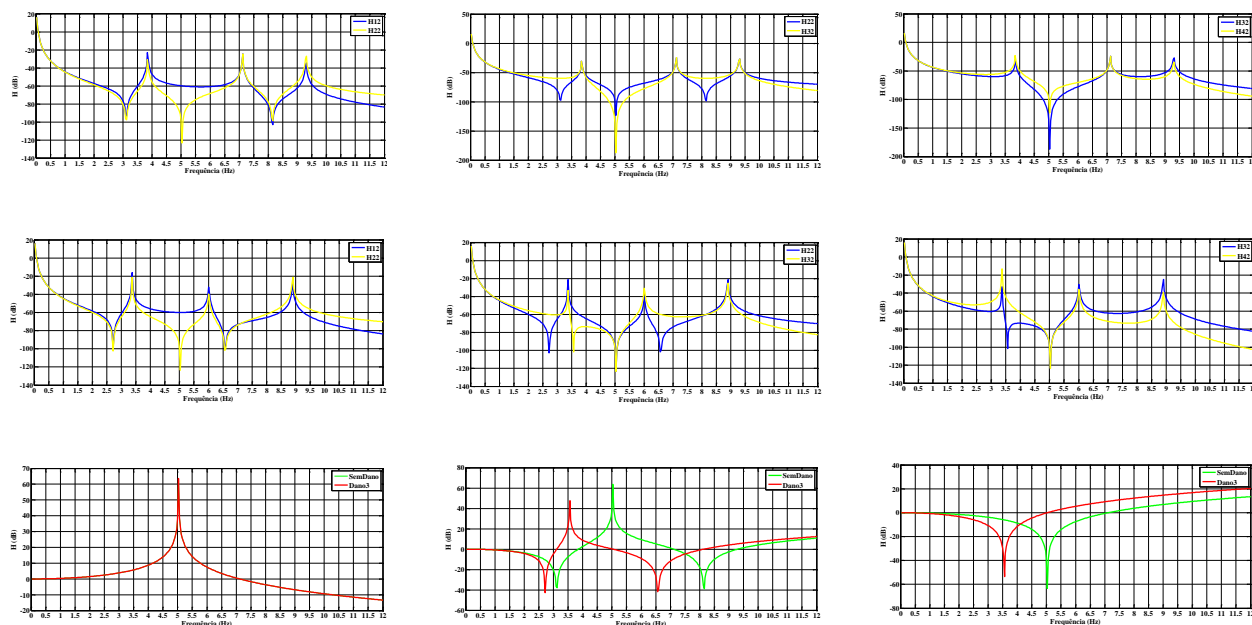


Figura 3.4 Excitação axial no nó 2, dano em K3. FRFs para cada elemento s/ dano (1ª linha), FRFs para cada elemento c/ dano (2ª linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3ª linha).

É de referir que a disposição da ordem das figuras é exatamente a mesma que foi escolhida para o conjunto de imagens referentes à excitação no nó 1 com o dano presente no elemento 1.

Fazendo um cruzamento entre o andamento das curvas registado nas Figura 3.3 e Figura 3.4 e os indicadores de dano registados nas Tabela 3.6 (1ª linha) e Tabela 3.7 (3ª linha), é possível estabelecer uma relação direta entre os mesmos. Analisando a equação (3.1), que representa a fórmula de cálculo do indicador usado no presente trabalho, é fácil perceber que se trata de um somatório em frequência da diferença de gráficos da estrutura danificada e da estrutura sã. Assim, é notório que quando não existem diferenças entre as FTs calculadas para a estrutura sã e para a estrutura danificada, o respetivo ID é praticamente nulo, tal como acontece em muitos valores registados nas tabelas acima. Conclui-se então que, ao analisar três gráficos (um para cada elemento da estrutura) que contenham duas Funções de Transmissibilidade (uma para a estrutura sã e outra para estrutura danificada), para uma correta localização do dano é necessário que somente o gráfico que representa o elemento danificado ilustre diferenças entre as duas FTs aí representadas, sendo que os restantes devem ter ambas as FTs sobrepostas, de modo a não haver diferenças entre ambas, tal como acontece na Figura 3.3.

Na Tabela 3.10 encontra-se o resumo da correta localização dos elementos danificados, caracterizada pelo comportamento semelhante em todos os cenários de excitação, em que o dano apenas é corretamente localizado quando a excitação é efetuada nos nós adjacentes ao elemento danificado.

Tabela 3.10 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação (0-12Hz)

Correta Localização	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
Excitação nó 1	✓	✗	✗
Excitação nó 2	✓	✓	✗
Excitação nó 3	✗	✓	✓
Excitação nó 4	✗	✗	✓

A mesma conclusão já tinha sido mencionada por *Fenge et al.* [50] num estudo sobre a presença de dano num túnel de metro.

3.2.3 Indicador de Dano Contínuo

Informações mais pormenorizadas sobre as particularidades do ID são fornecidas através da sua evolução ao longo da frequência. Assim, é introduzido o conceito de **Indicador de Dano Contínuo (IDC)**. Este indicador é semelhante ao que foi usado por *Siebel et al.*[40] e por *Chesné et al.* [51]. O valor do IDC é calculado para cada frequência quando uma gama de frequência é avaliada entre uma frequência inicial, Ω_{\min} , e a frequência atual, Ω_{atual} . Cada valor do IDC é calculado a partir da seguinte equação:

$$IDC_{kmn}(\Omega_{\text{atual}}) = \frac{\sum_{\Omega=\Omega_{\min}}^{\Omega_{\text{atual}}} |\log(TF_{kmn}^d(\Omega)) - \log(TF_{kmn}(\Omega))|}{\sum_{\Omega=\Omega_{\min}}^{\Omega_{\text{atual}}} |\log(TF_{kmn}(\Omega))|} \quad (3.4)$$

A Figura 3.5 mostra a evolução do IDC para cada elemento quando o elemento 2 está danificado e a excitação axial é feita no nó 1.

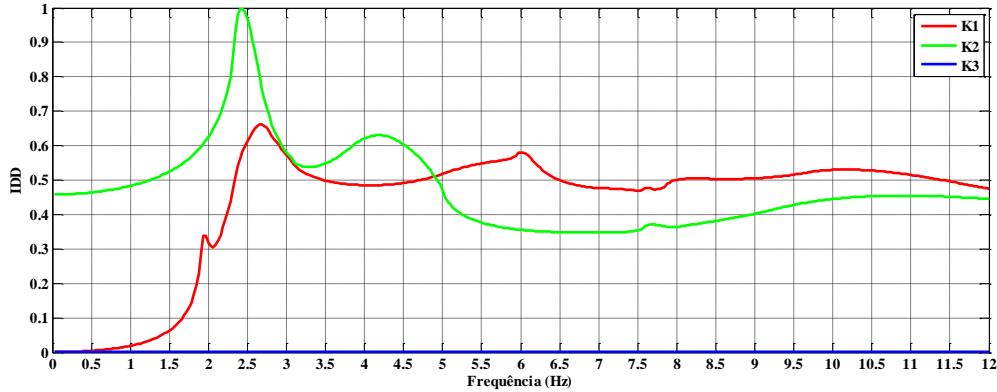


Figura 3.5 IDC para K2 Danificado, com Excitação Axial no nó 1

Através da análise da equação (3.4) e da Figura 3.5, é visível que a curva de cada FT termina no valor de IDC igual ao que consta na Tabela 3.6. Tal acontece porque a equação (3.4) consiste num somatório em frequência e os dados contidos na tabela (2ª linha) referida são o resultado desse somatório até à última frequência estudada, que neste caso foi de 12Hz. Assim, podemos afirmar que a curva que representa o elemento 1 termina no valor de 0.474 e que a curva que representa o elemento 2 termina no valor de 0.444.

Tal como pode ser observado na Tabela 3.6 o ID mais alto para o cenário em que o elemento 2 está danificado e a excitação é feita no nó 1 é o que corresponde a τ_{12} , consequentemente ao elemento 1 que não está danificado. O mesmo resultado pode ser visto na Figura 3.5. O IDC registado para a FT relativa aos nós do elemento 1 e 2 (danificado) é o segundo mais elevado, mas bastante próximo do elemento 1, e o IDC para o elemento 3 é praticamente zero tal como acontece na tabela 3.6. A partir da mesma figura também se nota que o IDC do elemento 2 é mais elevado que o IDC do elemento 1 até que este começa a aumentar substancialmente. Analisando a FRF medida (H_{11}) no nó 1 do elemento 1 (primeira imagem da Figura 3.3) é possível observar que existe uma anti-ressonância sensivelmente a 2.2 Hz, o que de acordo com Siebel *et al.* [40] pode ser uma explicação para este aumento súbito do IDC para o elemento 1.

3.2.4 Influência da Gama de Frequência na Localização do Dano

Como é dito no Estado da Arte, diversos autores referiram a importância da gama de frequência a usar no cálculo do ID. Na revisão bibliográfica de *Chesné et al.* [4] é mencionado que não é possível escolher *à priori* uma gama de frequência ideal para uma localização do dano estrutural. Em diversos casos, a correta localização do dano ocorre para uma gama de frequência baixa, até mesmo perto da primeira anti-ressonância da estrutura, tal como acontece no trabalho de *Siebel et al.* [40]. Neste estudo, os autores verificaram a que frequência ocorria a primeira anti-ressonância da estrutura e usaram o indicador de dano numa gama de frequências a partir de 0 Hz até esse valor medido através da FRF. Foi então verificado que nesta gama de frequência era possível uma correta e clara localização do dano, independentemente do local da excitação, da medição e do elemento danificado.

Neste trabalho optou-se por uma abordagem idêntica à referida anteriormente. Ao observar o primeiro gráfico da Figura 3.3 constata-se que a primeira anti-ressonância da estrutura ocorre sensivelmente a 2.2 Hz. Assim, a gama de frequências a usar é agora de 0 Hz a 2 Hz, de modo a fazer-se uma comparação com os resultados obtidos anteriormente numa gama de frequências até 12 Hz e ao mesmo tempo um paralelismo com os resultados obtidos por *Siebel et al.* [40].

As próximas quatro tabelas (Tab. 3.11-3.14) contêm os resultados dos ID para as quatro diferentes localizações de excitação, mas calculados numa gama de frequência de 0-2Hz.

Excitação Nó 1:

Tabela 3.11 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 1 (0-2 Hz)

Excitação nó 1	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.836	7.81E-10	1.51E-9
Dano K2	0.129	0.562	1.474-9
Dano K3	0.026	0.024	0.473

Excitação Nó 2:

Tabela 3.12 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 2 (0-2 Hz)

Excitação nó 2	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.473	8.68E-10	1.65E-9
Dano K2	1.85E-9	0.562	1.58E-9
Dano K3	1.70E-9	0.024	0.473

Excitação Nó 3:

Tabela 3.13 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 3 (0-2 Hz)

Excitação nó 3	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.473	0.024	1.70E-9
Dano K2	1.58E-9	0.562	1.85E-9
Dano K3	1.65E-9	8.68E-10	0.473

Excitação Nó 4:

Tabela 3.14 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 4 (0-2 Hz)

Excitação nó 4	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.473	0.024	0.026
Dano K2	1.47E-9	0.562	0.129
Dano K3	1.51E-9	7.81E-10	0.836

Analisando as Tabelas 3.11-3.14 é possível, tal como o estudo de *Siebel et al.* [40], afirmar que o dano é correta e claramente localizado, independentemente do nó em que a estrutura é excitada e do elemento que esteja danificado, ao contrário do que aconteceu quando foi calculado o ID para uma gama de frequência entre 0-12 Hz. No entanto, estes resultados não são de toda uma surpresa, uma vez que, tal como se viu na Figura 3.5, existe uma elevada disparidade nos IDs em baixas frequências, em particular

na gama de frequências entre 0-2 Hz, onde a curva que representa o elemento danificado apresenta um ID bem mais elevado que as outras duas curvas pertencentes ao ID dos elementos não danificados. Tal como aconteceu anteriormente, a simetria estrutural do sistema em estudo também é refletida nos dados contidos nas Tabelas 3.11-3.14.

Na Tabela 3.15 encontra-se o resumo da correta localização dos elementos danificados, onde é notório o contraste com o resumo apresentado na Tabela 3.10. Assim, para o caso de estudo de um sistema massa-mola linear, é possível afirmar que o recurso a uma gama de frequência que contenha as frequências até à 1ª anti-ressonância é a mais eficaz eficaz na deteção e localização de dano estrutural. Adicionalmente não é necessário qualquer critério para o local de excitação e medição de resposta, ao contrário do caso em que se considerava a gama de frequência 0-12 Hz, para o qual o dano apenas era corretamente localizado quando a excitação é imposta nos nós adjacentes ao elemento danificado.

Tabela 3.15 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação (0-2Hz)

Correta Localização	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
Excitação nó 1	✓	✓	✓
Excitação nó 2	✓	✓	✓
Excitação nó 3	✓	✓	✓
Excitação nó 4	✓	✓	✓

3.3 Sistema Massa-Mola Não Homogéneo

De forma a validar o método de deteção e localização de dano utilizado na estrutura anterior, optou-se por elaborar um estudo em tudo idêntico para uma estrutura rigidamente assimétrica, em que a rigidez das molas que a constituem é:

Tabela 3.16 Constantes de rigidez da estrutura não homogénea

Molas	Rigidez dos Elementos
K1	1200 N/m
K2	1000 N/m
K3	1500 N/m

As propriedades espaciais da estrutura foram, assim, caracterizadas através das suas matrizes de massa e rigidez dadas por:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1200 & -1200 & 0 & 0 \\ -1200 & 2200 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2500 & -1500 \\ 0 & 0 & -1500 & 1500 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Utilizando o *software MatLab* para resolver o problema de valores e vetores próprios obtiveram-se as frequências naturais da estrutura massa mola. Tal como tinha acontecido na estrutura linear homogénea surgiram três frequências naturais mais uma frequência de corpo rígido.

Tabela 3.17 Frequências naturais do sistema massa mola não homogénio

Frequências Naturais	Valor (Hz)
Freq. Corpo Rígido	9.13×10^{-7}
1º Frequência	4.11
2º Frequência	8.19
3º Frequência	10.18

De modo a simular o dano estrutural, a rigidez de cada uma das três molas foi novamente reduzida em 50%, sendo que apenas uma mola de cada vez foi danificada, de modo a tentar obter uma deteção e localização de dano mais simples. Tal como efetuado no estudo do sistema homogéneo. Consequentemente a matriz de rigidez global da estrutura sofreu alterações, consoante a localização diminuição da rigidez axial. Em baixo serão apresentadas as matrizes de rigidez global da estrutura para os estados de dano em K1, K2 e K3, respetivamente.

Matriz de rigidez com a mola K1 danificada:

$$[K_{1d}] = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 & 0 \\ -600 & 1600 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2500 & -1500 \\ 0 & 0 & -1500 & 1500 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz de rigidez com a mola K2 danificada:

$$[K_{2d}] = \begin{bmatrix} 1200 & -1200 & 0 & 0 \\ -1200 & 1700 & -500 & 0 \\ 0 & -500 & 2000 & -1500 \\ 0 & 0 & -1500 & 1500 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz de rigidez com a mola K3 danificada:

$$[K_{3d}] = \begin{bmatrix} 1200 & -1200 & 0 & 0 \\ -1200 & 2200 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 1750 & -750 \\ 0 & 0 & -750 & 750 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

É de referir que a matriz de massa global do sistema não sofre qualquer tipo de alteração devido à presença de dano, pois este é introduzido nas molas e não nas massas.

Como já se viu anteriormente, as frequências naturais de uma estrutura estão diretamente dependentes de alterações ao nível da rigidez estrutural. Na Tabela 3.18 estão contidas todas as frequências naturais da estrutura sã e da estrutura danificada em três localizações distintas, K1, K2 e K3.

Tabela 3.18 Frequências naturais da estrutura não homogénea com e sem dano

Frequências Naturais (Hz)	Estrutura sã	Dano K1	Dano K2	Dano K3
Freq. Corpo Rígido	9.13×10^{-7}	9.44×10^{-8}	4.38×10^{-7}	8.23×10^{-8}
1º Frequência	4.11	3.62	3.22	3.75
2º Frequência	8.19	6.73	8.08	6.86
3º Frequência	10.18	9.93	9.29	9.39

Ao contrário do registado no estudo da estrutura homogénea, as frequências naturais para a localização de dano em K1 e K3 já não são iguais. Tal facto vem validar a afirmação de que a semelhança registada na Tabela 3.4 é devido à homogeneidade e simetria estrutural.

De forma a fazer um paralelismo com o estudo efetuado para a estrutura homogénea serão apresentados dois casos idênticos aos referidos anteriormente, em que a excitação é realizada no nó 1 e o dano está presente no elemento 1 e a excitação no nó 2 com o dano presente no elemento 3.

Excitação Nó 1, Dano K1:

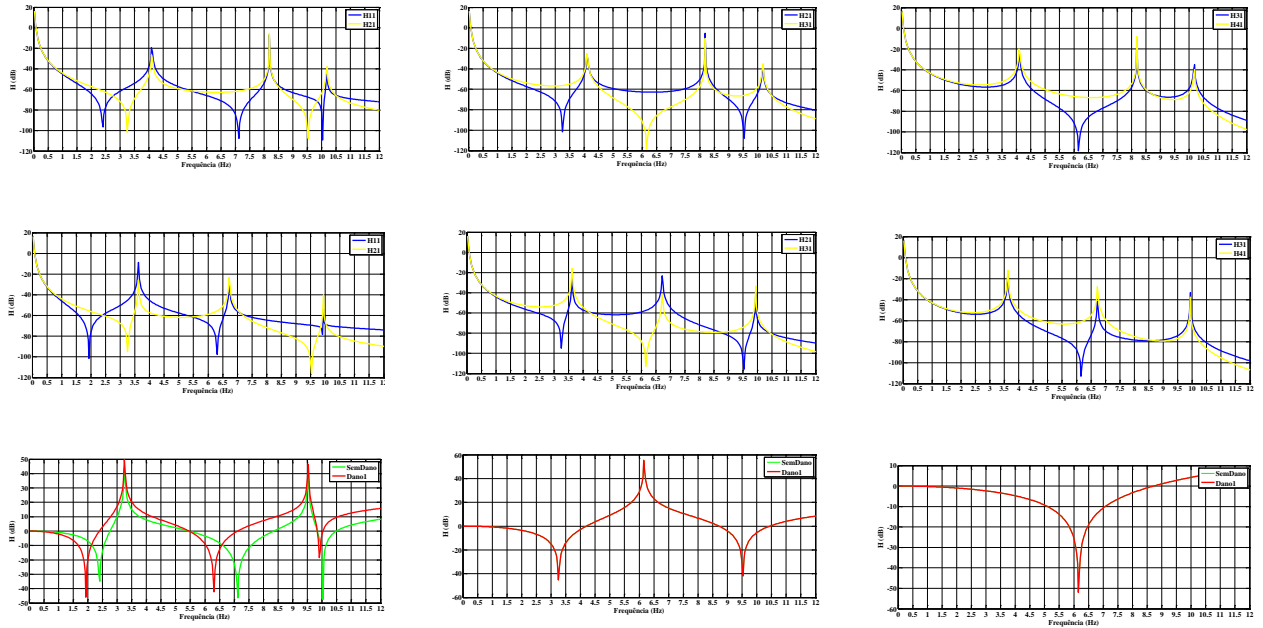


Figura 3.6 Excitação axial no nó 1, dano em K1. FRFs para cada elemento s/dano (1ª linha), FRFs para cada elemento c/dano (2ª linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3ª linha).

Excitação Nó 2, Dano K3:

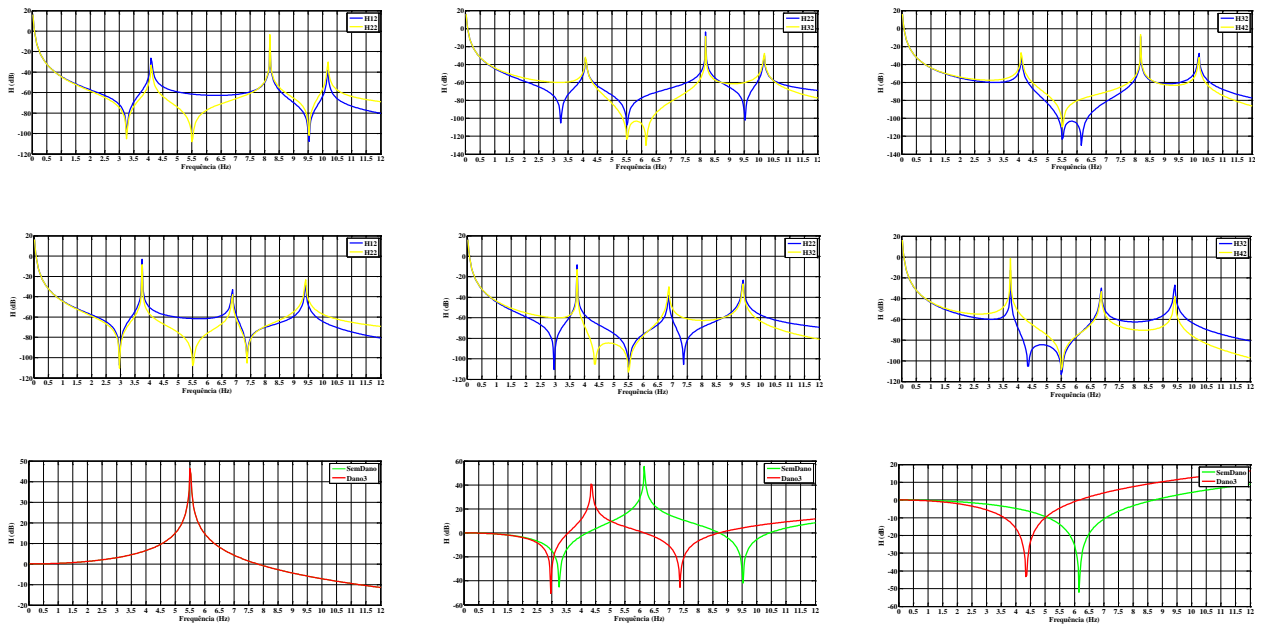


Figura 3.7 Excitação axial no nó 2, dano em K3. FRFs para cada elemento s/dano (1º linha), FRFs para cada elemento c/dano (2º linha) e FTs para cada elemento da estrutura (3º linha).

Fazendo uma primeira análise aos gráficos das Figura 3.6 e Figura 3.7 é perceptível que o comportamento das curvas é em tudo semelhante ao registado no conjunto de gráficos da Figura 3.3, o que vem salientar a validade do indicador usado neste trabalho.

Após a análise destes conjuntos de gráficos, é de esperar que os IDs calculados para este sistema não homogéneo apresentem o mesmo comportamento do que os registados anteriormente. As próximas quatro tabelas (Tab. 3.19-3.22) contêm os resultados do ID para as quatro diferentes localizações de excitação, calculados numa gama de frequência de 0-12Hz.

Excitação Nó 1:

Tabela 3.19 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 1 (0-12 Hz)

Excitação nó 1	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.486	9.17E-11	1.36E-10
Dano K2	0.478	0.379	1.23E-10
Dano K3	0.568	0.559	0.622

Excitação Nó 2:

Tabela 3.20 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 2 (0-12 Hz)

Excitação nó 2	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.569	9.40E-11	1.32E-10
Dano K2	1.15E-10	0.379	1.32E-10
Dano K3	1.18E-10	0.559	0.622

Excitação Nó 3:

Tabela 3.21 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 3 (0-12 Hz)

Excitação nó 3	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.569	0.555	1.22E-10
Dano K2	1.29E-10	0.420	1.19E-10
Dano K3	1.27E-10	9.15E-11	0.621

Excitação Nó 4:

Tabela 3.22 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial nó 4 (0-12 Hz)

Excitação nó 4	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.569	0.555	0.603
Dano K2	1.26E-10	0.420	0.497
Dano K3	1.35E-10	1.12E-10	0.546

Na Tabela 3.23 encontra-se o resumo da correta localização dos elementos danificados, caracterizada, tal como aconteceu no estudo da estrutura homogénea, pelo comportamento semelhante em todos os cenários de excitação, em que o dano apenas é corretamente localizado quando a excitação é efetuada nos nós adjacentes ao elemento danificado.

Tabela 3.23 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação, no estudo da estrutura não homogénea (0-12Hz)

Correta Localização	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
Excitação nó 1	✓	✗	✗
Excitação nó 2	✓	✓	✗
Excitação nó 3	✗	✓	✓
Excitação nó 4	✗	✗	✓

Comparando com a Tabela 3.10, não é possível observar qualquer diferença entre ambas, o que vem salientar ainda mais que o método aqui utilizado é válido, independentemente da estrutura apresentar uma homogeneidade estrutural, ou não.

3.3.1 Indicador de Dano Contínuo

Como foi visto na Secção 3.2.3, o IDC fornece informação mais pormenorizada sobre o ID através da sua evolução ao longo da frequência.

A Figura 3.8 mostra a evolução do IDC para cada elemento quando o elemento dois está danificado e a excitação axial é feita no nó 1.

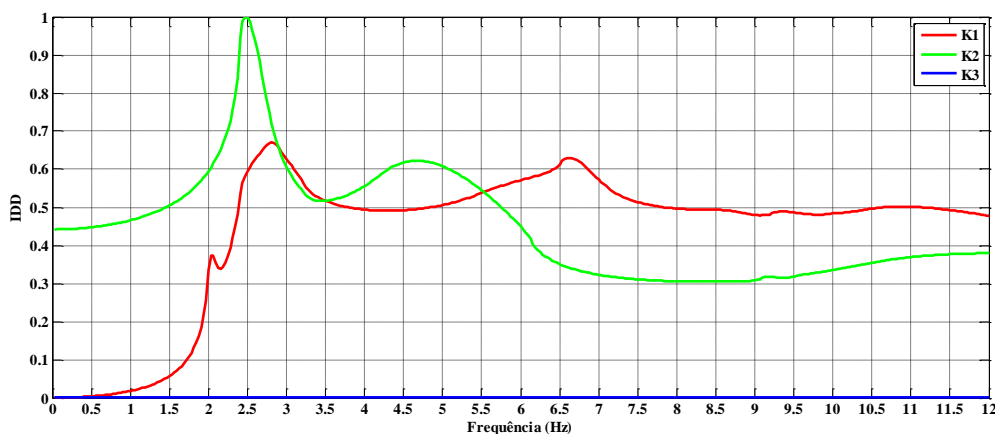


Figura 3.8 IDC para K2 Danificado, com Excitação Axial no nó 1 (Estrutura Não Homogénea)

Tal como acontece na Secção 3.2.3, a curva que representa a evolução do IDC de cada elemento termina no valor de IDC igual ao do ID da Tabela 3.19 (2ª linha). Assim podemos afirmar que a curva que representa o elemento 1 termina no valor de 0.478 e que a curva que representa o elemento 2 termina no valor de 0.379.

Tal como pode ser observado na Tabela 3.19, o ID mais alto para o cenário em que o elemento 2 está danificado e a excitação é feita no nó 1, é o que corresponde ao elemento 1, que não está danificado. O mesmo resultado pode ser visto na Figura 3.8. O IDC registado para o elemento 2 (danificado) é o segundo mais elevado, mas bastante próximo do elemento 1, e o IDC para o elemento 3 é praticamente zero tal como acontece na tabela 3.14. Em 3.2.3, o IDC que representa o elemento 1 começa a aumentar substancialmente na proximidade da frequência correspondente à 1ª anti-ressonância H_{11} (primeira imagem da Figura 3.8), o que vem confirmar a explicação proposta por Siebel *et al.* [40].

3.3.2 Influência da Gama de Frequências na Localização do Dano

Como referido anteriormente no Estado da Arte e na Secção 3.2.4, a gama de frequências a utilizar no cálculo do ID tem importância na deteção e localização do dano, com a agravante de não ser possível escolher *à priori* uma gama de frequências ideal, sendo que no presente trabalho, tal como em outros referidos anteriormente, a correta localização do dano foi obtida recorrendo a baixas frequências.

Assim, o critério para determinar o limite máximo de frequência a estudar foi exatamente o mesmo utilizado em 3.2.4, ou seja, estudar até à frequência em que ocorre a primeira anti-ressonância, medida através da FRF $H_{1,1}$, da estrutura sã.

Tal como acontece na estrutura homogénea, a primeira anti-ressonância da estrutura ocorre sensivelmente a 2.2 Hz. Na Secção 3.2.4, optou-se por estabelecer um limite máximo de 2 Hz para esta análise, de modo a fazer-se uma comparação com os resultados obtidos anteriormente no estudo da estrutura homogénea.

As Tabelas 3.24-3.27 contêm os resultados dos ID para as quatro diferentes localizações de excitação, mas calculados numa gama de frequência de 0-2Hz.

Excitação Nó 1:

Tabela 3.24 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 1 (0-2 Hz)

Excitação nó 1	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.840	7.38E-10	2.13E-9
Dano K2	0.184	0.571	2.14E-9
Dano K3	0.021	0.018	0.471

Excitação Nó 2:

Tabela 3.25 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 2 (0-2 Hz)

Excitação nó 2	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.477	6.75E-10	2.12E-9
Dano K2	1.68E-9	0.570	2.32E-9
Dano K3	1.89E-10	0.018	0.471

Excitação Nó 3:

Tabela 3.26 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 3 (0-2 Hz)

Excitação nó 3	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.477	0.024	2.20E-9
Dano K2	1.72E-9	0.587	2.35E-9
Dano K3	1.72E-9	7.17E-10	0.471

Excitação Nó 4:

Tabela 3.27 Indicadores de Dano para 3 cenários de dano com excitação axial no nó 4 (0-2 Hz)

Excitação nó 4	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.477	0.024	0.026
Dano K2	1.79E-9	0.587	0.170
Dano K3	2.03E-9	8.54E-10	0.699

Analisando as Tabelas 3.24-3.27 é possível localizar, independentemente do nó em que a estrutura é excitada e do elemento que esteja danificado, ao contrário do que aconteceu quando foi calculado o ID para uma gama de frequência entre 0-12 Hz (Tab. 3.19-3.22).

Na Tabela 3.28 encontra-se o resumo da correta localização dos elementos danificados, onde é notório o contraste com o resumo apresentado na Tabela 3.23, tal como aconteceu para a estrutura homogénea.

Tabela 3.28 Resumo do comportamento registado em todos os cenários de excitação (0-2Hz)

Correta Localização	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
Excitação nó 1	✓	✓	✓
Excitação nó 2	✓	✓	✓
Excitação nó 3	✓	✓	✓
Excitação nó 4	✓	✓	✓

3.4 Conclusões

O objetivo do presente capítulo era a modelação numérica de uma estrutura simples constituída por elementos barra, de modo a tentar perceber a alteração do comportamento deste tipo de estrutura devido à presença de dano, para depois, se avançar para o estudo de uma estrutura treliçada utilizando elementos barra.

Na fase de pesquisa bibliográfica foi analisado em detalhe o trabalho de *Siebel et al.* [40] e decidiu-se que o ideal seria tentar reproduzir o propósito deste artigo. Optou-se, assim, por modelar uma estrutura com três elementos barra, que posteriormente, tal como foi explicado, passou a uma estrutura massa-mola linear, e simular dano estrutural num dos elementos, tentando assim desenvolver um método que permitisse uma correta deteção e localização do mesmo. Posteriormente, foi estudada numa estrutura idêntica mas com rigidez estrutural diferente de elemento para elemento, para tentar validar o método proposto.

Através dos resultados obtidos é possível concluir que:

- O IDC conduziu a uma escolha alternativa da gama de frequências a analisar, de modo a uma correta e eficiente localização do dano;
- A gama de frequências a utilizar na determinação do ID de cada elemento tem uma grande importância na localização do dano estrutural;
- Ao analisar a gama de frequências completa (0-12 Hz) é apenas possível uma correta localização do dano quando a excitação é efetuada nos nós adjacentes ao elemento danificado.
- Com o recurso a uma gama de frequências baixas é possível localizar o dano, independentemente do local de excitação e de medição de resposta, especialmente em frequências que antecedem a 1ª anti-ressonância;
- Todas estas conclusões se verificaram na estrutura homogénea e não-homogénea, o que vem validar, quer o Indicador, quer a metodologia de deteção e localização utilizados no presente trabalho.

4 Modelo Numérico da Estrutura Trelaçada

Este capítulo inicia-se com a apresentação da modelação numérica de uma estrutura massa-mola triangular com 3 nós e 3 elementos, sendo especificadas sumariamente algumas abordagens de modelação até chegar ao modelo final. De seguida, é descrita a simulação dos dados obtidos no *software* MATLAB e a sua utilização em Excel. Após as conclusões desta estrutura triangular, será então estudada uma estrutura trelaçada com 7 elementos, 5 nós de modo a validar alguns métodos já conhecidos.

4.1 Introdução

À semelhança da Secção 2.4, também a modelação numérica das duas estruturas estudadas no presente capítulo foi realizada, utilizando o *software* MATLAB. No primeiro caso, o modelo de elementos finitos a analisar é uma estrutura constituída por três nós e três elementos barra, dispostos em forma de triângulo equilátero (trelça simples). Através do modelo numérico, foram obtidas as FRFs da estrutura. O tratamento destas, o cálculo das FTs e do ID foi feito através do *software* Excel. O mesmo procedimento foi adotado para a estrutura trelaçada.

Na Secção 2.4 demonstrou-se que não existem diferenças, em termos de propriedades dinâmicas, em estudar um sistema constituído por elementos barra e um sistema massa-mola em que os elementos barra são substituídos por molas com uma determinada rigidez e os nós representados por massas pontuais. Deste modo, torna-se relativamente simples manipularmos a ordem de grandeza das frequências naturais da estrutura pois é apenas necessário arbitrar as constantes de rigidez das molas e o valor das massas pontuais, tal como é fácil perceber recorrendo à equação (1.1).

Assim, no presente capítulo toda a modelação numérica foi feita recorrendo à utilização de sistemas massa-mola com a devida transformação de coordenadas, pois, como se trata de um sistema bidimensional (em contraste com um sistema unidimensional estudado na Secção 2.4), o deslocamento axial de cada nó da estrutura provoca modificações nas coordenadas dos mesmos num sistema de coordenadas global.

4.2 Estrutura Triangular

O objetivo do estudo desta estrutura é o de tentar estabelecer uma ponte entre o estudo de uma estrutura linear e o estudo de uma estrutura treliçada. Optou-se, assim, por um passo intermédio, de modo a tentar perceber que as alterações que surgem ou são observadas, devido à introdução de dano estrutural num dos elementos, quer a nível do comportamento das FRFs, quer das FTs, na deteção e localização de dano, entre uma estrutura linear e uma estrutura composta por elementos triangulares, como é o caso da treliça, pois talvez fosse muito precipitado passar diretamente para o estudo numérico de uma treliça.

4.2.1 Estrutura Triangular em Regime Livre-Livre

O sistema triangular começou por ser estudado em condições de apoio livre-livre, essencialmente por duas razões. Primeiro, para tentar estudar este sistema nas mesmas condições de apoio da estrutura linear anterior e, segundo, devido às dimensões da matriz H . Como referido anteriormente no Capítulo 2, um sistema com 6 GDL tem uma matriz de receptância com a dimensão 6×6 , a matriz. Se o triângulo em estudo não estiver em regime livre-livre, alguns dos seus GDL serão eliminados, diminuindo, assim, a dimensão da matriz H . Tal facto irá afetar o número de FTs possíveis de calcular e consequentemente dos IDs dos elementos constituintes do triângulo.

Na Figura 4.1 está representada a estrutura triangular em análise.

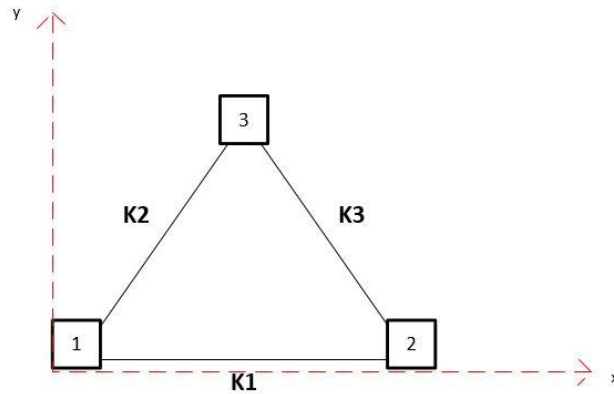


Figura 4.1 Estrutura Triangular com três nós e três elementos

Nota: Nesta figura foram substituídos os elementos mola por linhas apenas por simplicidade de desenho.

É de referir dois aspetos importantes na Figura 4.1:

- os valores de rigidez das molas e das massas pontuais são iguais aos escolhidos para estrutura linear, 1000 N/m e 1Kg, respetivamente;
- O ângulo entre os elementos é de 60° de modo a criar um triângulo equilátero;

Assim, as propriedades espaciais, em coordenadas locais, de cada elemento da estrutura foram assim caracterizadas através das suas matrizes de rigidez e massa, dadas por:

$$[K_{elemento}] = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Todas as matrizes (massa e rigidez) de cada elemento foram sujeitas a uma transformação de coordenadas, tal como foi explicado na Secção 2.4, de modo a representarem as propriedades dinâmicas de cada elemento num sistema de coordenadas global, representado a vermelho na Figura 4.1. Posteriormente a esta transformação de coordenadas, foi então feita a assemblagem das matrizes de modo a ter as matrizes de massa e de rigidez globais.

Utilizando o *software MatLab* para resolver o problema de valores e vetores próprios, obtiveram-se as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da estrutura triangular. Surgiram três frequências naturais da estrutura, sendo que cada uma caracteriza um modo de vibração da estrutura, e três frequências de corpo rígido.

Tabela 4.1 Frequências Naturais da Estrutura Triangular

Frequências Naturais	Valor (Hz)
Freq. Corpo Rígido (1)	6.23×10^{10}
Freq. Corpo Rígido (2)	5.57×10^9
Freq. Corpo Rígido (3)	4.48×10^8
1º Frequência	7.12
2º Frequência	7.12
3º Frequência	7.12

Como é possível observar na Tabela 4.1, as três ressonâncias da estrutura ocorrem exatamente ao mesmo valor de frequência. Isto deve-se à simetria da estrutura, quer em termos dimensionais (triângulo equilátero), quer em termos de rigidez da estrutura (todas as molas do sistema possuem a mesma constante de rigidez). Apesar dos valores das frequências naturais serem idênticos, os respectivos modos de vibração são distintos uns dos outros. Na tabela abaixo são apresentados os modos de vibração para cada uma das respectivas frequências, de modo a confirmar as suas diferenças.

Tabela 4.2 Modos de Vibração da Estrutura Triangular

	1º Freq	2º Freq	3º Freq	4º Freq	5º Freq	6º Freq
Nó 1_x	0.235	0.483	0.460	0.123	0.696	0.00
Nó 1_y	0.073	-0.874	0.253	-0.639	-0.302	-0.577
Nó 2_x	0.235	0.483	0.460	-0.123	-0.696	0.00
Nó 2_y	0.877	0.243	-0.075	0.498	-0.503	-0.577
Nó 3_x	-0.461	-0.484	0.744	0.985	-0.174	0.00
Nó 3_y	0.475	-0.316	0.089	0.00	0.00	0.577

É de notar que as três primeiras frequências na Tabela 4.2 correspondem a frequências de corpo rígido.

Por uma questão de simplificação de nomenclatura, o número dos nós será renomeado de acordo com a Tabela 4.3.

Tabela 4.3 Renomeação dos GDL da estrutura

GDL	Coordenadas
1 _x	1
1 _y	2
2 _x	3
2 _y	4
3 _x	5
3 _y	6

4.2.1.1 Modelação do Dano

De modo a simular o dano estrutural, a rigidez das três molas foi reduzida em 50%, embora neste trabalho apenas uma mola de cada vez tenha sido danificada, de modo a tentar obter uma deteção e localização de dano mais simples e facilitada. Assim, a matriz de rigidez de cada elemento da estrutura sofreu alterações devido à diminuição da rigidez axial, sendo dada por:

$$[K_{\text{elem.danificado}}] = \begin{bmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Como foi referido anteriormente, as frequências naturais de uma estrutura estão diretamente dependentes de alterações de rigidez estrutural, tal como mostra a equação (1.1). Na Tabela 4.4 estão contidas todas as frequências, da estrutura sã e danificada em K1, K2 e K3.

Tabela 4.4 Frequências Naturais da Estrutura Triangular com e sem Dano

Frequências Naturais (Hz)	Estrutura sã	Dano K1	Dano K2	Dano K3
Freq. Corpo Rígido	$6.23 \cdot 10^{10}$	$9.28 \cdot 10^{10}$	$9.08 \cdot 10^9$	$2.19 \cdot 10^9$
Freq. Corpo Rígido	$5.57 \cdot 10^9$	$7.87 \cdot 10^9$	$8.63 \cdot 10^8$	$7.58 \cdot 10^8$
Freq. Corpo Rígido	$4.48 \cdot 10^8$	$8.42 \cdot 10^8$	$1.31 \cdot 10^7$	$1.08 \cdot 10^7$
1º Frequência	7.12	5.03	5.03	5.03
2º Frequência	7.12	7.12	7.12	7.12
3º Frequência	7.12	7.12	7.12	7.12

Mais uma vez, os valores das frequências naturais (à exceção das frequências de corpo rígido) mantêm-se iguais, cada uma representando um modo de vibração distinto. Tal como foi referido anteriormente esta coincidência deve-se à simetria da estrutura.

4.2.1.2 Simulação Numérica das Vibrações Axiais

Nesta dissertação, a deteção e localização de dano teve por base a excitação e medição de vibrações somente na direção de orientação de cada elemento. Foram investigados seis cenários de excitação distintos, uma excitação na coordenada 1 e assim sucessivamente até à coordenada 6. Foi considerada apenas a excitação numa coordenada de forma a obter respostas em qualquer uma das seis coordenadas. O mesmo procedimento adotou-se para a excitação nas coordenadas 2, 3, 4, 5 e 6. As FTs foram então calculadas a partir da medição das FRFs em cada um dos seus nós adjacentes, tal como efetuado na Secção 3. Para cada excitação efetuada obtiveram-se respostas em todos os nós e as FTs utilizadas foram sempre calculadas pelo quociente das FRFs dos seus nós adjacentes. Como referido, todo este estudo foi efetuado para três distintas localizações de dano.

As Figura 4.2 e Figura 4.3 representam as FRFs $H_{1,1}$ e $H_{5,1}$, respetivamente, para 4 casos: estrutura sã e danificada em K1, K2 e K3, na gama de frequências de 0-10Hz. Tal como no Secção 2.4, a gama de frequências a analisar foi escolhida de modo a englobar todas as frequências da estrutura.

Na Figura 4.2 são visíveis apenas duas curvas distintas. A curva que representa a função $H_{1,1}$ e a curva que representa a função $H_{1,1}^{d,K1}$ (dano em K1). As restantes curvas, que representam as funções $H_{1,1}^{d,K2}$ (dano em K2) e $H_{1,1}^{d,K3}$ (dano em K3) estão suprimidas na figura, pois estão sobrepostas com a função $H_{1,1}$. Assim, é possível observar um comportamento diferente na função que representa a resposta num nó adjacente ao elemento danificado, o que permite detetar um possível dano estrutural. É de referir que a resposta $H_{3,1}$ apresenta um comportamento semelhante, tal como é possível ver nos Anexos.

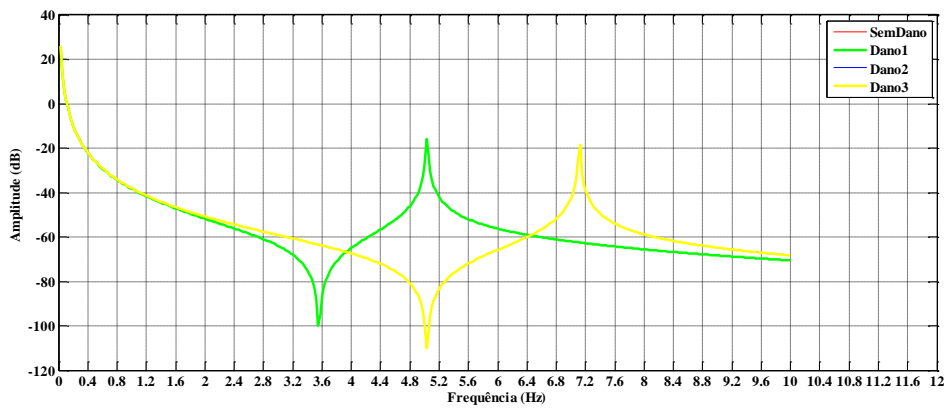


Figura 4.2 FRF $H_{1,1}$ da Estrutura Triangular

Em contraste com a Figura 4.2, na Figura 4.3 é possível distinguir as quatro curvas distintas. A curva da estrutura sã, $H_{5,1}$, e todas as restantes já explicadas em cima, cada uma para um elemento danificado distinto. No entanto, nesta figura é possível observar que todas as curvas apresentam ruído. Este problema acontece sempre que a excitação é feita numa das coordenadas da base do triângulo e a medição é feita numa das coordenadas do vértice superior do mesmo (restantes gráficos em Anexos), ou vice-versa visto que a matriz das FRFs é simétrica.

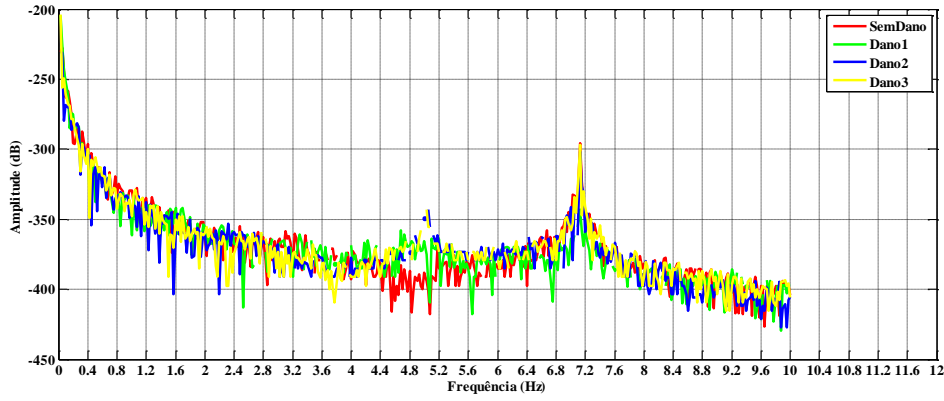


Figura 4.3 FRF $H_{5,1}$ da Estrutura Triangular

Uma vez que as FTs obtidas no presente trabalho são fruto do quociente entre duas FRFs, torna-se bastante complicado obter Funções de Transmissibilidade que sejam úteis para detetar e localizar dano, especialmente nos elementos 2 e 3, impossibilitando o cálculo de IDs credíveis. Visto que este problema acontece, geralmente, nos elementos que não estão alinhados de acordo com a direção axial do sistema de coordenadas global, foi decidido reformular o estudo desta estrutura triangular com condições de apoio diferentes.

4.3 Estrutura Triangular Biapoiada

Como referido na Secção 4.2.1 se se restringir o deslocamento dos nós do triângulo através de apoios (fixos ou móveis), a matriz H irá sofrer uma diminuição de dimensão visto que alguns dos GDL da estrutura são eliminados, afetando o número de FTs possíveis de calcular para a determinação dos IDs.

Logo, a solução encontrada foi introduzir numericamente na estrutura três molas (nas coordenadas 1, 2 e 4), de modo a simular uma estrutura biapoiada, como demonstrado na Figura 4.4.

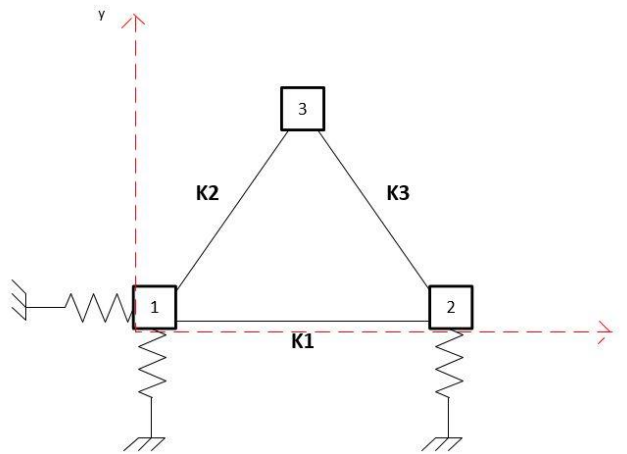


Figura 4.4 Estrutura Triangular Biapoiada com três nós e três elementos

Nota: Nesta figura foram substituídos os elementos mola por linhas, apenas por simplicidade de desenho.

Tal como na Figura 4.1, os valores de rigidez das molas ($K1$, $K2$ e $K3$) e as massas pontuais são 1000 N/m e 1 Kg, respetivamente. O ângulo entre os elementos é de 60° de modo a criar um triângulo equilátero.

As constantes de rigidez das molas introduzidas com o intuito de simularem um apoio fixo no nó 1 e um apoio móvel no nó 2 foram escolhidas de modo a não perturbarem excessivamente o comportamento da própria estrutura. Assim, arbitrou-se que as constantes de rigidez dessas três molas seriam um grau de grandeza inferior aos dos elementos $K1$, $K2$ e $K3$, resultando num valor de 100 N/m.

Utilizando o *software MatLab* para resolver o problema de valores e vetores próprios obtiveram-se as frequências naturais e os respetivos modos de vibração da estrutura triangular. Surgiram seis frequências naturais da estrutura, cada uma correspondente com a deformação axial de cada mola, como é demonstrado na Tabela 4.5

Tabela 4.5 Frequências Naturais da Estrutura Triangular Biapoiada

Frequências Naturais	Valor (Hz)
1º Frequência	0.82
2º Frequência	1.27
3º Frequência	1.74
4º Frequência	7.17
5º Frequência	7.24
6º Frequência	7.33

Na Tabela 4.5 é possível observar que as três frequências naturais mais elevadas da estrutura não diferem muito dos 7.12 Hz registados na estrutura em condição livre-livre. Este facto vem confirmar que os três valores de frequência iguais registados anteriormente na Tabela 4.1 resultam da estrutura ser simétrica. Na estrutura biapoiada não existe essa simetria pois a restrição ao nível do deslocamento dos nós da base do triângulo faz com que este não se comporte de forma simétrica. Além disso, é também perceptível que as três molas introduzidas nesta estrutura de forma a simular dois apoios (um móvel e um fixo) não influenciam excessivamente as propriedades dinâmicas do sistema visto não existir grande diferença entre os valores das 4ª, 5ª e 6ª frequências naturais e os valores de frequência registados na estrutura anterior.

4.3.1 Modelação do Dano

A modelação do dano na estrutura biapoiada foi em tudo semelhante ao estudado na estrutura em regime livre-livre. Assim, a matriz de rigidez de cada elemento da estrutura é dada por:

$$[K_{elem.danificado}] = \begin{bmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Como referido anteriormente, as frequências naturais de uma estrutura estão diretamente dependentes de alterações de rigidez estrutural, facto evidenciado pela equação (1.1) . Na Tabela 4.6 estão contidas todas as frequências, da estrutura sã e danificada em K1, K2 e K3.

Tabela 4.6 Frequências Naturais da Estrutura Triangular Biapoiada com e sem Dano

Frequências Naturais (Hz)	Estrutura sã	Dano K1	Dano K2	Dano K3
1º Frequência	0.82	0.81	0.82	0.82
2º Frequência	1.27	1.26	1.26	1.26
3º Frequência	1.74	1.73	1.72	1.72
4º Frequência	7.17	5.24	5.21	5.21
5º Frequência	7.24	7.24	7.19	7.19
6º Frequência	7.33	7.24	7.32	7.32

Analisando a Tabela 4.6, é possível constatar algumas diferenças, sobretudo na 4ª frequência de ressonância, devido à introdução de dano em qualquer um dos elementos no triângulo. No entanto, não é possível identificar qual o elemento danificado olhando apenas para os valores de frequência e fazendo uma comparação com os mesmos registados na estrutura sã.

4.3.2 Simulação Numérica de Vibrações Axiais

Anteriormente foi referido que a deteção e localização de dano teve por base a excitação e medição de vibrações na direção de orientação de cada elemento. Todo o procedimento de investigação, tais como os cenários de excitação, as excitações nas coordenadas da estrutura, a medição das FRFs e o cálculo de FTs, foi, em tudo, semelhante ao estudo da estrutura regime livre-livre retratado em 4.2.1.2. No entanto, importa realçar que todo este estudo foi efetuado para três distintas localizações de dano.

Nas Figura 4.5 e Figura 4.6 estão representadas as mesmas FRFs, $H_{1,1}$ e $H_{5,1}$, que foram apresentadas na estrutura em regime livre-livre, para que se possa perceber a influência da introdução das três molas nas coordenadas 1, 2 e 4, de modo a simularem um apoio fixo (coordenadas 1 e 2) e um apoio móvel (coordenada 4).

Na Figura 4.5 é de novo visível que a curva relativa à FRF $H_{1,1}^{d,K1}$ (dano em K1) apresenta um desfasamento considerável em relação às restantes. Basicamente o comportamento da curva é idêntico às restantes mas o seu pico (e anti-pico) são antecipados devido ao valor de frequência natural mais baixo. Nesta figura é possível um comportamento diferente na função que representa a resposta num nó adjacente ao elemento danificado, o que permite detetar um possível dano estrutural. As restantes curvas estão praticamente sobrepostas com a curva que representa a estrutura sã, $H_{1,1}$. É de referir que a resposta $H_{3,1}$ já não apresenta um comportamento semelhante, tal como é possível ver nos Anexos, o que vem confirmar que tal semelhança se devia à simetria estrutural em regime livre-livre.

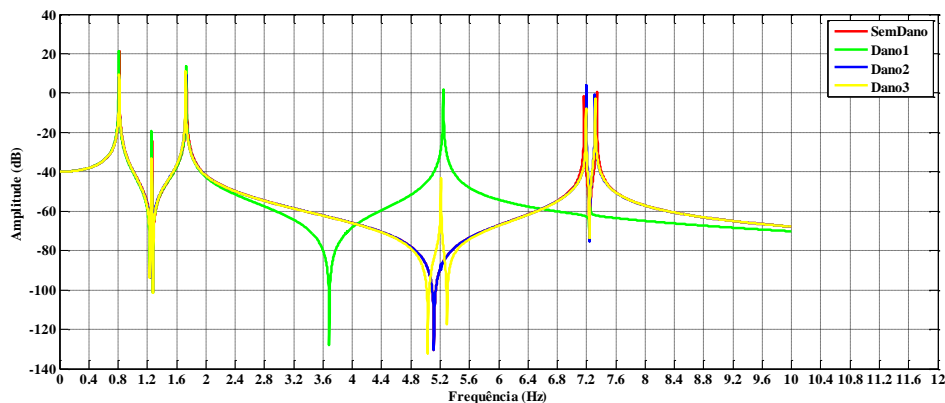


Figura 4.5 FRF $H_{1,1}$ da Estrutura Triangular Biapoiada

Em contraste com a Figura 4.3, na figura seguinte é possível observar quatro “FRFs limpas”. É possível afirmar que as condições de apoio de uma estrutura bidimensional influenciam a medição de respostas nos nós, e, conseqüentemente, o cálculo de FTs e de Indicadores de Dano. Porém, não é possível observar um desfasamento numa das FRFs, tal como acontecia na Figura 4.5.

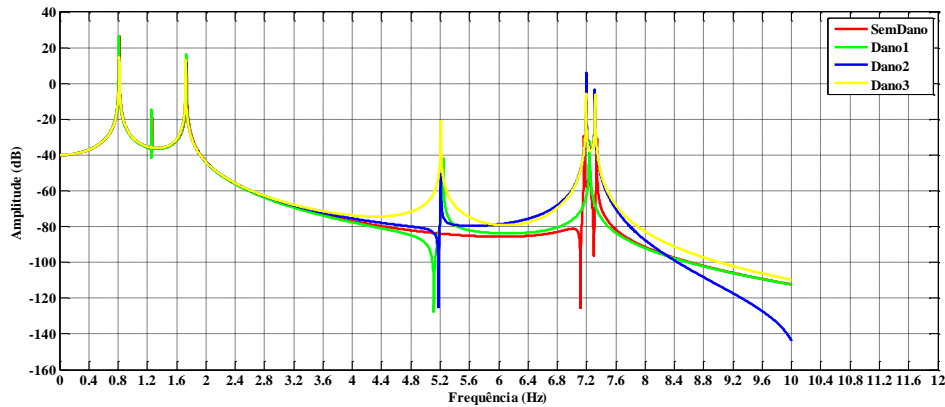


Figura 4.6 FRF $H_{5,1}$ da Estrutura Triangular Biapoiada

Logo torna-se possível obter as Funções de Transmissibilidade necessárias para o cálculo do ID em todos os elementos desta estrutura.

Como já foi referido, nesta estrutura cada nó possui duas coordenadas, uma vez que se trata de um sistema bidimensional. Assim, para o cálculo das Funções de Transmissibilidade entre os nós tem-se sempre mais do que uma opção em relação às FRFs a utilizar. De modo a fazer um estudo coerente optou-se por estabelecer uma regra neste aspeto:

- Quando se estuda a Transmissibilidade entre dois nós, combinam-se sempre as respostas medidas ou na direção axial (coordenadas ímpar) ou na direção transversal (coordenadas par), nunca calculando por exemplo, a Transmissibilidade entre as coordenadas 1 e 4.

Na Tabela 4.7 encontram-se resumidos todos os casos estudados para esta estrutura.

Tabela 4.7 Resumo dos Casos Estudados na Estrutura Triangular Biapoiada

Caso	Elemento K1	Excitação	FRFs	Elemento K2	Excitação	FRFs	Elemento K3	Excitação	FRFs
A	$FT_{1\oplus,3}$	Coordenada 1	$\frac{H_{1,1}}{H_{3,1}}$	$FT_{1\oplus,5}$	Coordenada 1	$\frac{H_{1,1}}{H_{5,1}}$	$FT_{3\oplus,5}$	Coordenada 3	$\frac{H_{3,3}}{H_{5,3}}$
B	$FT_{1\oplus,3}$	Coordenada 2	$\frac{H_{1,2}}{H_{3,2}}$	$FT_{1\oplus,5}$	Coordenada 2	$\frac{H_{1,2}}{H_{5,2}}$	$FT_{3\oplus,5}$	Coordenada 4	$\frac{H_{3,4}}{H_{5,4}}$
C	$FT_{1\oplus,3}$	Coordenada 3	$\frac{H_{1,3}}{H_{3,3}}$	$FT_{1\oplus,5}$	Coordenada 5	$\frac{H_{1,5}}{H_{5,5}}$	$FT_{3\oplus,5}$	Coordenada 3	$\frac{H_{3,3}}{H_{5,3}}$
D	$FT_{1\oplus,3}$	Coordenada 4	$\frac{H_{1,4}}{H_{3,4}}$	$FT_{1\oplus,5}$	Coordenada 6	$\frac{H_{1,6}}{H_{5,6}}$	$FT_{3\oplus,5}$	Coordenada 4	$\frac{H_{3,4}}{H_{5,4}}$
E	$FT_{2\oplus,4}$	Coordenada 1	$\frac{H_{2,1}}{H_{4,1}}$	$FT_{2\oplus,6}$	Coordenada 1	$\frac{H_{2,1}}{H_{6,1}}$	$FT_{4\oplus,6}$	Coordenada 3	$\frac{H_{4,3}}{H_{6,3}}$
F	$FT_{2\oplus,4}$	Coordenada 2	$\frac{H_{2,2}}{H_{4,2}}$	$FT_{2\oplus,6}$	Coordenada 2	$\frac{H_{2,2}}{H_{6,2}}$	$FT_{4\oplus,6}$	Coordenada 4	$\frac{H_{4,4}}{H_{6,4}}$
G	$FT_{2\oplus,4}$	Coordenada 3	$\frac{H_{2,3}}{H_{4,3}}$	$FT_{2\oplus,6}$	Coordenada 5	$\frac{H_{2,5}}{H_{6,5}}$	$FT_{4\oplus,6}$	Coordenada 3	$\frac{H_{4,3}}{H_{6,3}}$
H	$FT_{2\oplus,4}$	Coordenada 4	$\frac{H_{2,4}}{H_{4,4}}$	$FT_{2\oplus,6}$	Coordenada 6	$\frac{H_{2,6}}{H_{6,6}}$	$FT_{4\oplus,6}$	Coordenada 4	$\frac{H_{4,4}}{H_{6,4}}$

Nas Tabelas 4.9-4.16 serão apresentados os valores dos IDs calculados para cada um dos casos:

Caso A:

Tabela 4.8 Indicadores de Dano para o caso A (0-10 Hz)

Caso A	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.665	0.245	0.236
Dano K2	6.46E-10	0.619	0.645
Dano K3	0.169	0.406	0.353

Caso B:

Tabela 4.9 Indicadores de Dano para o caso B (0-10 Hz)

Caso B	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.665	0.418	0.389
Dano K2	3.63E-10	1	0.191
Dano K3	0.167	0.153	0.937

Caso C:

Tabela 4.10 Indicadores de Dano para o caso C (0-10 Hz)

Caso C	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.705	0.039	0.249
Dano K2	0.196	0.611	0.450
Dano K3	6.31E-10	0.684	0.546

Caso D:

Tabela 4.11 Indicadores de Dano para o caso D (0-10 Hz)

Caso D	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.705	2.63E-11	0.411
Dano K2	0.091	0.935	0.094
Dano K3	2.12E-10	0.983	0.584

Caso E:

Tabela 4.12 Indicadores de Dano para o caso E (0-10 Hz)

Caso E	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.665	0.175	0.161
Dano K2	0.354	0.328	0.313
Dano K3	0.345	0.733	0.815

Caso F:

Tabela 4.13 Indicadores de Dano para o caso F (0-10 Hz)

Caso F	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.633	0.587	0.555
Dano K2	0.539	0.807	0.121
Dano K3	0.728	0.582	0.808

Caso G:

Tabela 4.14 Indicadores de Dano para o caso G (0-10 Hz)

Caso G	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.705	0.264	0.171
Dano K2	0.424	0.839	0.352
Dano K3	0.417	0.774	0.361

Caso H:

Tabela 4.15 Indicadores de Dano para o caso H (0-10 Hz)

Caso H	ID (Elemento 1)	ID (Elemento 2)	ID (Elemento 3)
Dano K1	0.483	0.894	0.426
Dano K2	0.129	0.794	0.108
Dano K3	0.486	0.910	0.732

Na Tabela 4.16 está resumida a aplicação do ID a todas as Funções de Transmissibilidade calculadas para cada um dos casos apresentados.

Tabela 4.16 Resumo do comportamento registado em todos os casos de estudo (0-10Hz)

Correta Localização	Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
Caso A	✓	✗	✗
Caso B	!	✓	✓
Caso C	✓	!	✗
Caso D	✓	✓	✗
Caso E	✓	✗	!
Caso F	!	✓	!
Caso G	✓	✓	✗
Caso H	✗	✓	✗

Nota: O símbolo “!” significa que apesar do ID ser maior no elemento danificado, não é suficientemente destacável em relação aos restantes, de modo a ser possível afirmar uma clara localização do dano.

Pode observar-se que não foi conseguido um padrão consistente de localização de dano, tal como aconteceu para a estrutura linear estudada no Capítulo 2.4. Assim, apenas é possível concluir que os casos onde o elemento danificado é corretamente identificado são o resultado do desfasamento das FTs (entre a estrutura sã e o elemento danificado) calculadas anteriormente. Os gráficos das FTs calculadas estão presente nos Anexos.

4.4 Estrutura Treliçada

Uma vez que já foram estudadas uma estrutura reticulada linear e uma estrutura reticulada triangular, resta agora analisar uma estrutura treliçada, que não é mais do que uma estrutura com três células triangulares, tal como é apresentada na Figura 4.7.

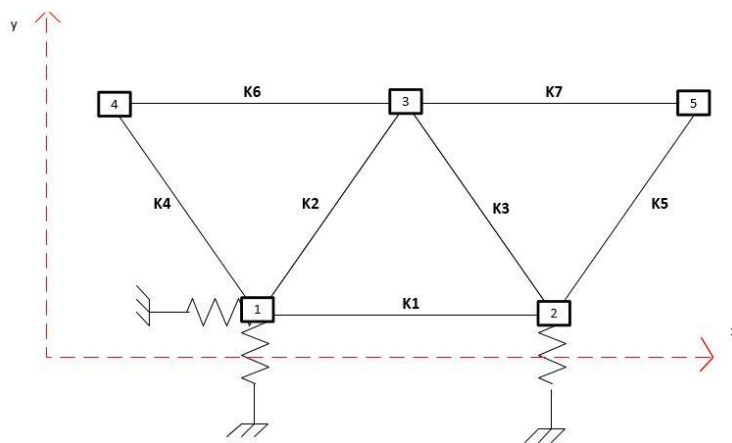


Figura 4.7 Estrutura Treliçada Biapoiada com cinco nós e sete elementos

Nota: Nesta figura foram substituídos os elementos mola por linhas apenas por simplicidade de desenho.

Optou-se por uma treliça biapoiada por já ter sido verificada anteriormente a influência da introdução das três molas adicionais no comportamento dinâmico da estrutura. A rigidez destas molas é idêntica às utilizadas no estudo anterior, ou seja, 100 N/m.

A rigidez dos elementos massa-mola e o valor das massas pontuais são idênticos a todos os outros estudos anteriores, 1000 N/m e 1 Kg, respetivamente.

Na Tabela 4.17 são apresentados os valores das frequências de ressonância para a estrutura sã e para o dano em cada um dos elementos da treliça

Tabela 4.17 Frequências Naturais da Estrutura Treliçada Biapoiada

Frequências Naturais (Hz)	Estrutura sã	Dano K1	Dano K2	Dano K3	Dano K4	Dano K5	Dano K6	Dano K7
1º Frequência	0.42	0.42	0.41	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42
2º Frequência	0.83	0.82	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83
3º Frequência	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
4º Frequência	4.06	3.33	3.26	3.29	3.65	3.69	3.71	3.71
5º Frequência	4.15	4.08	4.15	4.09	4.12	4.07	4.14	4.14
6º Frequência	5.03	5.03	5.03	5.03	5.03	5.03	4.27	4.27
7º Frequência	6.62	6.36	6.39	6.42	5.48	5.48	6.30	6.30
8º Frequência	7.14	6.62	6.64	6.63	6.88	6.89	6.88	6.88
9º Frequência	7.16	7.14	7.15	7.15	7.15	7.15	7.16	7.16
10º Frequência	7.18	7.18	7.17	7.17	7.17	7.17	7.18	7.18

Analisando a Tabela 4.17, é possível constatar algumas diferenças devido à introdução de dano em qualquer um dos elementos da treliça. No entanto, não é possível identificar qual o elemento danificado olhando apenas para os valores de frequência e fazendo uma comparação com os mesmos registrados na estrutura sã.

Por uma questão de simplificação de nomenclatura, o número dos nós será renomeado de acordo com a Tabela 4.18

Tabela 4.18 Renomeação dos nós da estrutura treliçada biapoçada

Nós	Coordenadas
1 _x	1
1 _y	2
2 _x	3
2 _y	4
3 _x	5
3 _y	6
4 _x	7
4 _y	8
5 _x	9
5 _y	10

Como referido anteriormente, numa estrutura bidimensional, cada nó possui duas coordenadas. Por conseguinte, foram assumidas duas regras para o cálculo das FTs:

- Foi utilizado um critério igual ao utilizado na estrutura triangular biapoçada, não misturando medições nas respostas axiais e transversais;
- Quando a excitação é feita na direção axial, apenas se usam as respostas medidas nessa direção para o cálculo das FTs. Quando a excitação é feita na direção transversal, o procedimento é análogo.

Foram estudados dez cenários de excitação, um para cada coordenada do sistema. Todas as FRFs foram registadas de modo a ser possível calcular as FTs para todos os elementos da treliça.

Na Tabela 4.19 encontram-se resumidas todas as FTs analisadas na treliça, com excitação axial e transversal nas coordenadas 1 e 2, respetivamente. Para a excitação nas restantes coordenadas, o cálculo de FTs é análogo.

Tabela 4.19 Resumo dos Casos Estudados na Estrutura Trelça Biapoiada

Elemento em Análise	Transmissibilidade (Excit. Axial)	FRFs	Transmissibilidade (Excit. Transversal)	FRFs
Elemento 1	$FT_{1 \leftrightarrow 3}$	$\frac{H_{1,1}}{H_{3,1}}$	$FT_{2 \leftrightarrow 4}$	$\frac{H_{2,2}}{H_{4,2}}$
Elemento 2	$FT_{1 \leftrightarrow 5}$	$\frac{H_{1,1}}{H_{5,1}}$	$FT_{2 \leftrightarrow 6}$	$\frac{H_{2,2}}{H_{6,2}}$
Elemento 3	$FT_{3 \leftrightarrow 5}$	$\frac{H_{3,1}}{H_{5,1}}$	$FT_{4 \leftrightarrow 6}$	$\frac{H_{4,2}}{H_{6,2}}$
Elemento 4	$FT_{1 \leftrightarrow 7}$	$\frac{H_{1,1}}{H_{7,1}}$	$FT_{2 \leftrightarrow 8}$	$\frac{H_{2,2}}{H_{8,2}}$
Elemento 5	$FT_{3 \leftrightarrow 9}$	$\frac{H_{3,1}}{H_{9,1}}$	$FT_{4 \leftrightarrow 10}$	$\frac{H_{4,2}}{H_{10,2}}$
Elemento 6	$FT_{7 \leftrightarrow 5}$	$\frac{H_{7,1}}{H_{5,1}}$	$FT_{8 \leftrightarrow 6}$	$\frac{H_{8,2}}{H_{6,2}}$
Elemento 7	$FT_{5 \leftrightarrow 9}$	$\frac{H_{5,1}}{H_{9,1}}$	$FT_{6 \leftrightarrow 10}$	$\frac{H_{6,2}}{H_{10,2}}$

Nas próximas dez tabelas serão apresentados os IDs calculados para cada uma das coordenadas de excitação.

Excitação na coordenada 1:

Tabela 4.20 Indicadores de Dano na Trelça com excitação na coordenada 1 (0-10 Hz)

Excitação 1	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.543	0.216	0.281	0.239	0.317	1.3E-10	1.3E-10
Dano K2	0.537	0.381	0.480	0.4232	0.541	2.3E-10	2.9E-10
Dano K3	0.666	0.346	0.428	0.388	0.482	1.9E-10	1.9E-10
Dano K4	0.708	0.317	0.354	0.352	0.399	2.3E-10	2.3E-10
Dano K5	0.684	0.227	0.352	0.252	0.396	2.4E-10	2.4E-10
Dano K6	0.200	0.129	0.132	0.235	0.148	0.609	1.2E-10
Dano K7	0.200	0.129	0.132	0.123	0.248	1.2E-10	0.609

Excitação na coordenada 2:

Tabela 4.21 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 2 (0-10 Hz)

Excitação 2	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.048	0.379	0.330	0.240	0.339	0.481	0.436
Dano K2	0.324	0.589	0.321	0.379	0.4689	0.648	0.701
Dano K3	0.463	0.576	0.628	0.547	0.915	0.626	0.589
Dano K4	0.227	0.631	0.511	0.748	0.528	0.967	0.442
Dano K5	0.422	0.598	0.632	0.425	0.776	0.689	0.728
Dano K6	0.336	0.575	0.461	0.495	0.729	0.720	0.678
Dano K7	0.279	0.478	0.384	0.538	0.768	0.661	0.766

Excitação na coordenada 3:

Tabela 4.22 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 3 (0-10 Hz)

Excitação 3	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.603	0.305	0.228	0.343	0.252	1.5E-10	1.5E-10
Dano K2	0.656	0.405	0.331	0.456	0.369	1.8E-10	1.8E-10
Dano K3	0.529	0.448	0.347	0.504	0.384	2.2E-10	2.2E-10
Dano K4	0.671	0.332	0.219	0.371	0.245	2.3E-10	2.3E-10
Dano K5	0.704	0.356	0.319	0.401	0.354	2.4E-10	2.4E-10
Dano K6	0.215	0.132	0.129	0.248	0.142	0.609	1.2E-10
Dano K7	0.215	0.132	0.129	0.149	0.234	1.2E-10	0.609

Excitação na coordenada 4:

Tabela 4.23 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 4 (0-10 Hz)

Excitação 4	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.047	0.314	0.364	0.347	0.187	0.408	0.479
Dano K2	0.477	0.647	0.586	0.961	0.526	0.627	0.587
Dano K3	0.418	0.446	0.758	0.653	0.487	0.563	0.759
Dano K4	0.418	0.628	0.602	0.762	0.386	0.722	0.601
Dano K5	0.095	0.216	0.258	0.241	0.575	0.341	0.297
Dano K6	0.284	0.432	0.518	0.831	0.569	0.761	0.594
Dano K7	0.346	0.526	0.630	0.736	0.491	0.668	0.632

Excitação na coordenada 5:

Tabela 4.24 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 5 (0-10 Hz)

Excitação 5	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.436	0.027	0.026	0.024	0.023	6.6E-11	6.6E-11
Dano K2	0.965	0.066	0.078	0.059	0.069	2.8E-11	2.8E-11
Dano K3	0.894	0.077	0.063	0.068	0.055	2.7E-11	2.7E-11
Dano K4	0.749	0.069	0.068	0.062	0.059	4.4E-11	4.4E-11
Dano K5	0.781	0.061	0.063	0.054	0.056	3.9E-11	3.9E-11
Dano K6	5.6E-10	5.8E-11	5.9E-11	0.248	5.2E-11	0.609	1.2E-11
Dano K7	5.6E-10	5.8E-11	5.9E-11	5.1E-11	0.247	1.2E-10	0.609

Excitação na coordenada 6:

Tabela 4.25 Indicadores de Dano na Trelça com excitação na coordenada 6 (0-10 Hz)

Excitação 6	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.458	0.210	0.195	0.226	0.216	0.122	0.122
Dano K2	0.406	0.067	0.058	0.051	0.052	0.037	0.038
Dano K3	0.422	0.057	0.065	0.051	0.053	0.035	0.038
Dano K4	1	0.165	0.104	0.218	0.119	0.132	0.071
Dano K5	1	0.097	0.164	0.116	0.210	0.069	0.141
Dano K6	0.790	0.091	0.126	0.145	0.166	0.046	0.048
Dano K7	0.790	0.091	0.126	0.126	0.169	0.044	0.055

Excitação na coordenada 7:

Tabela 4.26 Indicadores de Dano na Trelça com excitação na coordenada 7 (0-10 Hz)

Excitação 7	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.436	0.027	0.233	0.070	0.023	0.009	6.8E-11
Dano K2	0.965	0.066	0.078	0.170	0.069	0.039	2.9E-11
Dano K3	0.894	0.077	0.063	0.162	0.055	0.038	2.8E-11
Dano K4	0.749	0.069	0.068	0.249	0.059	0.046	4.7E-11
Dano K5	0.781	0.061	0.063	0.229	0.056	0.039	3.9E-11
Dano K6	5.6E-10	6.2E-11	6.2E-11	0.7704	5.4E-11	0.609	1.4E-10
Dano K7	5.4E-10	5.8E-11	5.6E-11	0.661	0.247	0.320	0.609

Excitação na coordenada 8:

Tabela 4.27 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 8 (0-10 Hz)

Excitação 8	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.102	0.523	0.476	0.419	0.318	0.328	0.551
Dano K2	0.139	0.194	0.247	0.150	0.149	0.126	0.159
Dano K3	0.086	0.089	0.124	0.055	0.097	0.055	0.085
Dano K4	0.366	0.256	0.404	0.794	0.539	0.398	0.630
Dano K5	0.447	0.477	0.668	0.464	0.683	0.292	0.829
Dano K6	0.415	0.396	0.676	0.637	0.756	0.387	0.628
Dano K7	0.251	0.297	0.377	0.613	0.402	0.304	0.466

Excitação na coordenada 9:

Tabela 4.28 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 9 (0-10 Hz)

Excitação 9	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.436	0.027	0.026	0.024	0.019	6.8E-11	0.009
Dano K2	0.965	0.0662	0.078	0.059	0.054	2.9E-11	0.039
Dano K3	0.894	0.078	0.063	0.069	0.042	2.8E-11	0.038
Dano K4	0.749	0.069	0.068	0.062	0.049	4.7E-11	0.046
Dano K5	0.781	0.061	0.063	0.054	0.040	3.9E-11	0.039
Dano K6	5.4E-10	5.8E-10	5.6E-11	0.2593	0.174	0.609	0.320
Dano K7	5.6E-10	6.2E-11	6.2E-11	5.4E-11	0.182	1.4E-10	0.609

Excitação na coordenada 10:

Tabela 4.29 Indicadores de Dano na Treliça com excitação na coordenada 10 (0-10 Hz)

Excitação 10	ID (Elem. 1)	ID (Elem.2)	ID (Elem.3)	ID (Elem.4)	ID (Elem.5)	ID (Elem.6)	ID (Elem.7)
Dano K1	0.098	0.504	0.504	0.352	0.397	0.539	0.308
Dano K2	0.096	0.127	0.088	0.099	0.053	0.084	0.057
Dano K3	0.134	0.251	0.192	0.152	0.145	0.162	0.129
Dano K4	0.388	0.614	0.458	0.627	0.439	0.821	0.289
Dano K5	0.359	0.408	0.263	0.533	0.812	0.624	0.386
Dano K6	0.223	0.336	0.284	0.389	0.601	0.459	0.301
Dano K7	0.194	0.339	0.198	0.376	0.323	0.875	0.208

Em relação à localização do correto elemento danificado, o ideal seria que os elementos da diagonal (apresentados a azul) de cada uma das tabelas fosse maior que qualquer outro ID na sua própria linha, o que permitiria a correta localização do dano. Esse facto só acontece para os elementos orientados segundo a direção horizontal, quando a excitação é feita axialmente em qualquer uma das coordenadas ímpares. Quando a estrutura é excitada transversalmente nada pode ser concluído em relação a uma correta localização do dano estrutural, à exceção da excitação nas coordenadas 8 e 10. Quando a treliça é excitada na coordenada 8, os elementos 3 e 4 são devidamente identificados e quando a treliça é excitada na coordenada 10, os elementos 2 e 5 são também identificados, o que não deixa de ser curioso, visto tratar-se de uma simetria.

Na Tabela 4.30 é apresentado um breve resumo do comportamento padrão registado na localização de dano na treliça. É possível perceber quais os elementos danificados que são corretamente identificados, ou não, em função da coordenada de excitação, quer transversal, quer axial.

Tabela 4.30 Resumo do comportamento padrão registado na localização do dano na treliça em todos os casos de estudo (0-10Hz)

Excitação (Coordenada)	Elem. 1	Elem. 2	Elem. 3	Elem. 4	Elem. 5	Elem. 6	Elem. 7
1	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
2	✗	✗	✗	✗	!	✗	✗
3	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
4	✗	✗	✗	!	✓	✗	✗
5	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
6	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
7	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
8	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗
9	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
10	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗

É de realçar que o mesmo padrão foi registado para a mesma treliça em duas outras condições de apoio distintas. Além das três molas introduzidas nas coordenadas 1, 2 e 4, foi também objeto de estudo a introdução de uma mola na coordenada 3 de modo a simular dois apoios fixos (um no nó 1 e outro no nó 2). Foi também estudado um caso em que quatro molas foram colocadas nas coordenadas 7, 8, 9 e 10, de modo a simular dois apoios fixos na parte superior da treliça, deixando a parte inferior em regime livre.

A influência da gama de frequências foi também analisada, tendo sido calculados IDs para três gamas de frequências diferentes:

- 0-10Hz de modo a englobar as 10 frequências naturais (como apresentado anteriormente;
- 0-6Hz de modo a englobar 6 frequências naturais
- 0-3Hz de modo a englobar 6 frequências naturais

O mesmo padrão manteve-se para todos os casos, o que vem confirmar a coerência do método utilizado, apesar de muitos dos elementos da treliça não serem devidamente localizados quando danificados.

4.5 Conclusões

No presente capítulo desta dissertação, o objetivo era a modelação numérica de uma estrutura triangular e outra treliçada constituída por elementos barra, tentando perceber o comportamento destas devido à presença de dano num dos elementos, uma vez que neste sistema existia a novidade de 2 GDL por nó (X e Y), ao contrário do que acontecia na estrutura linear em que havia somente liberdade axial em cada nó. Posteriormente, o objetivo era introduzir o mesmo Indicador e metodologia utilizados na Secção 2.4, de modo a detetar e localizar o dano estrutural numa treliça, de modo a cumprir os objetivos propostos para o presente trabalho.

Através dos resultados obtidos é possível concluir que:

- Através das alterações nas frequências naturais é possível detetar o dano mas não localizá-lo;
- As condições de apoio de uma estrutura bidimensional influenciam a medição de respostas nos nós, e consequentemente, o cálculo de FTs e de Indicadores de Dano;
- Em regime livre-livre, não é possível obter FTs úteis para o cálculo de IDs quando os elementos em análise não estão alinhados de acordo com a direção axial do sistema de coordenadas global;
- Os casos onde o elemento danificado é corretamente identificado são o resultado do desfasamento das FTs entre a estrutura sã e o elemento danificado;
- Na estrutura treliçada, os elementos dispostos segundo a direção horizontal são corretamente localizados (quando danificados) apenas quando a excitação é feita em qualquer uma das coordenadas axiais;
- Quando a treliça é excitada transversalmente, não são tiradas conclusões relevantes, à exceção de dois elementos diagonais que são corretamente identificados;
- O padrão de localização de dano registado nos elementos da treliça mantém-se, independentemente das condições de apoio da treliça e da gama de frequências utilizada.

5 Conclusões Finais e Desenvolvimentos Futuros

Neste último capítulo expõem-se as conclusões, que foram sendo reveladas ao longo do trabalho e são apresentadas as perspectivas de desenvolvimento futuro neste domínio.

O objetivo central foi estudar um método de deteção e localização de dano estrutural em estruturas reticuladas. Foi desenvolvido um modelo numérico criado com base no MEF, utilizando elementos barra, de modo a simular uma análise modal, recorrendo ao *software MatLab*. As FRFs das estruturas foram obtidas e posteriormente foram calculadas as FTs correspondentes a cada elemento das estruturas e diversos IDs, de modo a ser possível uma localização de dano eficaz. Em relação a este último tema, as conclusões serão distintas, consoante o tipo de estrutura em estudo, dependendo se esta for unidimensional ou bidimensional, embora seja possível afirmar, em ambos os casos, que um sistema massa-mola se assemelha, em tudo, a uma estrutura constituída por elementos barra que tenham apenas um grau de liberdade axial, num sistema de coordenadas local.

Em relação ao estudo da estrutura linear composta por um sistema massa-mola de 4 GDL conclui-se que a gama de frequências a utilizar no cálculo do ID de cada elemento tem uma importância crucial na localização do elemento danificado, sendo possível, para baixas frequências, nomeadamente antes da 1ª anti-ressonância da estrutura, excitar e medir a resposta da estrutura em qualquer uma das coordenadas e detetar, assim, a localização do dano. Por outro lado, ao analisar uma gama de frequências mais abrangente, é apenas possível uma correta localização do dano quando a excitação é efetuada num dos nós adjacentes ao elemento danificado. Todas as conclusões nesta estrutura se verificaram, quer numa estrutura homogénea, quer numa não-homogénea em termos de rigidez estrutural, o que valida a metodologia de deteção e localização de dano utilizados neste estudo.

Quanto às estruturas englobadas num sistema de coordenadas bidimensional, é possível concluir que as condições de apoio das mesmas influenciam a medição de respostas nos nós, influenciando o cálculo de FTs e IDs. Em condição livre-livre, não foi possível calcular FTs úteis para o cálculo de IDs quando os elementos da estrutura não estão alinhados de acordo com a direção axial do sistema de coordenadas global, uma vez que muitas das FRFs medidas nos nós da estrutura se revelam bastante afetadas com ruído. Os casos onde o elemento danificado é corretamente identificado são o resultado do desfasamento das FTs entre a estrutura sã e o elemento danificado, não sendo possível estabelecer uma regra de excitação e medição de respostas à semelhança da estrutura linear.

Na estrutura treliçada observa-se que apenas os elementos horizontais são corretamente localizados (quando danificados), quando a excitação é realizada nas coordenadas axiais, não sendo possível tirar conclusões relevantes quando a treliça é excitada transversalmente. O padrão de localização de elementos danificados na treliça manteve-se independentemente das condições de apoio da treliça e da gama de frequências utilizada.

Numa perspetiva de trabalho futuro, seria interessante dar continuidade ao estudo realizado nesta dissertação, uma vez que métodos não destrutivos são cada vez mais utilizados na análise estrutural. Seria aliciante estudar uma formulação matemática, com base em cálculo matricial, de modo a perceber quais as FRFs e FTs influenciadas pela presença de dano num dos elementos da estrutura e procurar um método capaz de otimizar a gama de frequências ideal na localização de dano. A validação desta metodologia em ambiente laboratorial não deveria ser deixada de parte. No estudo da estrutura treliçada, seria oportuno estender uma metodologia igual ou semelhante a uma estrutura tridimensional e fazer a sua validação em ambiente prático.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Almeida, A. Urgueira, and N. M.M. Maia, “Using Transmissibility to Detect and Quantify Structural Damage,” presented in *Proceedings of Internacional Conference on Engineering Dynamics* (ICEDyn), Tavira, Algarve, Portugal 2011.
- [2] D. E. Bray and R. K. Stanley, “Nondestructive evaluation: a tool in design, manufacturing and service,” CRC Press, 1996.
- [3] A. Rytter, “Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures,” Aalborg University, Denmark, 1993.
- [4] S. Chesné and A. Deraemaeker, “Damage localization using transmissibility functions: A critical review,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 38, no. 2, pp. 569–584, 2013.
- [5] S. W. S. Doebling, C. R. C. Farrar, M. B. M. Prime, and D. W. D. Shevitz, “Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review,” *Distribution*, p. 133p, 1996.
- [6] N. G. Park and Y. S. Park, “Identification of damage on a substructure with measured frequency response functions,” *J. Mech. Sci. Technol.*, vol. 19, no. 10, pp. 1891–1901, 2005.
- [7] J. Sinou, “A review of damage detection and health monitoring of mechanical systems from changes in the measurement of linear and non-linear vibrations”, in *Mechanical Vibrations: Measurement, Effects and Control*, Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systemes UMR-CNRS 551. 2009, pp. 643-702.
- [8] J. M. Lifshitz and a. Rotem, “Determination of Reinforcement Unbonding of Composites by a Vibration Technique,” *J. Compos. Mater.*, vol. 3, no. 3, pp. 412–423, 1969.
- [9] A. Messina, E. J. Williams, and T. Contursi, “Structural Damage Detection by A Sensitivity and Statistical-Based Method,” *J. Sound Vib.*, vol. 216, pp. 791–808, 1998.
- [10] O. S. Salawu, “Detection of structural damage through changes in frequency: a review,” *Eng. Struct.*, vol. 19, no. 9, pp. 718–723, 1997.
- [11] H. F. Lam, J. M. Ko, and C. W. Wong, “Localization of Damaged Structural Connections Based on Experimental Modal and Sensitivity Analysis,” *J. Sound Vib.*, vol. 210, no. 1, pp. 91–115, 1998.
- [12] J. D. P. Morais, “Detecção e localização de dano em estruturas,” Tese de Mestrado, FCT-UNL, 2014.
- [13] Z. Y. Shi, S. S. Law, and L. M. Zhang, “Structural damage localization from modal strain energy change,” *J. Sound Vib.*, vol. 218, no. 5, pp. 825–844, 1998.
- [14] J.-T. Kim and N. Stubbs, “Crack Detection in Beam-Type Structures Using Frequency Data,” *J. Sound Vib.*, vol. 259, no. 1, pp. 145–160, 2003.
- [15] Z. Wang, R. M. Lin, and M. K. Lim, “Structural damage detection using measured FRF data,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 7825, no. 97, pp. 187–197, 1997.

- [16] R. Lin and D. Ewins, "Analytical model improvement using frequency response functions," *Mech. Syst. and Signal Process.*, 1994.
- [17] J. V. Araújo dos Santos, C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares, and N. M. M. Maia, "Structural damage identification in laminated structures using FRF data," *Compos. Struct.*, vol. 67, no. 2, pp. 239–249, 2005.
- [18] U. Lee and J. Shin, "A frequency response function-based structural damage identification method," *Comput. Struct.*, vol. 80, no. 2, pp. 117–132, 2002.
- [19] M. P. Limongelli, "Frequency response function interpolation for damage detection under changing environment," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 24, no. 8, pp. 2898–2913, 2010.
- [20] I. Bovio, V. Massimo, and L. Lecce, "Innovative Method for Damage Identification and Structural Health Monitoring based on Vibration Measurements," presented at the 9th European Conference on NDT, 2006.
- [21] Q. Chen, Y. W. Chan, K. Worden, and G. R. Tomlinson, "Structural fault detection using neural networks trained on transmissibility functions," presented at the Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering, Beijing, China, pp. 456–646, 1994.
- [22] K. Worden, "Structural Fault Detection Using a Novelty Measure," *J. Sound Vib.*, vol. 201, no. 1, pp. 85–101, 1997.
- [23] K. Worden, G. Manson, and D. Allman, "Experimental Validation of a Structural Health Monitoring Methodology: Part I. Novelty Detection on a Laboratory Structure," *J. Sound Vib.*, vol. 259, no. 2, pp. 323–343, 2003.
- [24] Q. Chen, Y. W. Chan, and K. Worden, "Structural fault diagnosis and isolation using neural networks based on response-only data," *Comput. Struct.*, vol. 81, no. 22–23, pp. 2165–2172, 2003.
- [25] G. Manson, "Experimental validation of a structural health monitoring methodology: part III. Damage location on an aircraft wing," *J. Sound Vib.* 259(2) (2003) 365–385
- [26] C. Devriendt, G. Steenhackers, and P. Guillaume, "On the use of transmissibility in the field of: operational modal analysis and structural health monitoring," Proceedings of the 8th National Congress in Theoretical and Applied Mechanics, Brussels, Belgium, 2009.
- [27] C. Devriendt and P. Guillaume, "The use of transmissibility measurements in output-only modal analysis," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 21, no. 7, pp. 2689–2696, 2007.
- [28] G. Manson, "Experimental validation of a structural health monitoring methodology: part II. Novelty detection on a gnat aircraft," *J. Sound Vib.* 259(2) (2003) 345–363
- [29] K. Worden, L. Y. Cheung, and J. A. Rongong, "Damage detection in an aircraft component model," *Proc. Int. Modal Anal. Conf. - IMAC*, vol. 2, pp. 1234–1241, 2001.
- [30] E. Papatheou, G. Manson, R. J. Barthorpe, and K. Worden, "The use of pseudo-faults for novelty detection in SHM," *J. Sound Vib.*, vol. 329, no. 12, pp. 2349–2366, 2010.
- [31] M. J. Schulz, P. F. Pai, and Linville, "Detecting Structural Damage Using Transmittance Functions," presented at the Proceedings-SPIE The International Society for Optical Engineering, 1997

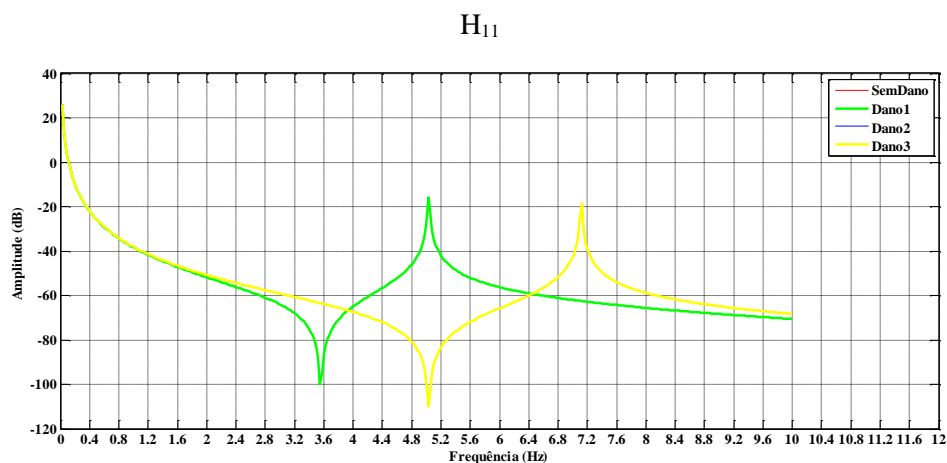
- [32] V. Caccese, R. Mewer, and S. S. Vel, "Detection of bolt load loss in hybrid composite/metal bolted connections," *Eng. Struct.*, vol. 26, no. 7, pp. 895–906, 2004.
- [33] W. Liu and D. J. Ewins, "Transmissibility properties of MDOF systems," *Proc. Int. Modal Anal. Conf. - IMAC*, vol. 2, pp. 847–854, 1998.
- [34] N. M. M. Maia, J. M. M. Silva, and A. M. R. Ribeiro, "the Transmissibility Concept in Multi-Degree-of-Freedom Systems," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 15, no. 1, pp. 129–137, 2001.
- [35] A. M. R. Ribeiro, J. M. M. Silva, and N. M. M. Maia, "on the Generalisation of the Transmissibility Concept," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 14, no. 1, pp. 29–35, 2000.
- [36] J. E. Mottershead, "On the zeros of structural frequency response functions and their application to model assessment and updating," *Proc. Int. Modal Anal. Conf. - IMAC*, vol. 1, pp. 500–503, 1998.
- [37] T. J. Johnson and D. E. Adams, "Transmissibility as a Differential Indicator of Structural Damage," *J. Vib. Acoust.*, vol. 124, no. 4, p. 634, 2002.
- [38] R. P. C. Sampaio, N. M. Maia, A. M. R. Ribeiro, J. M. M. Silva, " Transmissibility Techniques for Damage Detection," presented at the Proceedings of the International Modal Analysis Conference, 2001, vol.2, pp. 1524-1527
- [39] M. J. Sc. and F. F. H. Zhang, "Structural Health Monitoring Using Transmittance Functions," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 13, no. 5, pp. 765–787, 1999.
- [40] T. Siebel and D. Mayer, "Damage Detection on a Truss Structure using Transmissibility Functions," no. July, pp. 4–6, 2011.
- [41] N. M. M. Maia, R. A. B. Almeida, A. P. V. Urgueira, e R. P. C. Sampaio, "Damage detection and quantification using transmissibility," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 25, pp. 2475–2483, 2011.
- [42] M. J. Schulz, P. F. Pai, and D. J. Inman, "Health monitoring and active control of composite structures using piezoceramic patches," *Compos. Part B Eng.*, vol. 30, no. 7, pp. 713–725, 1999.
- [43] T. J. Johnson, R. L. Brown, D. E. Adams, and M. Schiefer, "Distributed structural health monitoring with a smart sensor array," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 18, no. 3, pp. 555–572, 2004.
- [44] T. J. Johnson and D. E. Adams, "Rolling tire diagnostic experiments for identifying incipient bead damage using time, frequency, and phase plane analysis," in *Proceedings of the SAE 2006 World Congress*, 2006.
- [45] H. R. Kess and D. E. Adams, "Investigation of operational and environmental variability effects on damage detection algorithms in a woven composite plate," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 21, no. 6, pp. 2394–2405, 2007.
- [46] N. M. M. Maia, A. P. V. Urgueira e R. A. B. Almeida, "Whys and Wherefores of Transmissibility," p. 352, 2011.
- [47] a M. R. Ribeiro, N. M. M. Maia, and J. M. M. Silva, "Experimental evaluation of the transmissibility matrix," *Proc. Int. Modal Anal. Conf. - IMAC*, vol. 2, pp. 1126–1129, 1999.
- [48] J. B. Cardoso and P. G. Coelho, *MEF Aplicado à Análise Estrutural Mecânica*. 2011.

- [49] E. C. N. Silva and A. Kawano, *MEF aplicado a Treliças*. 2014.
- [50] L. Feng, X. Yi, D. Zhu, X. Xie, and Y. Wang, “Damage detection of metro tunnel structure through transmissibility function and cross correlation analysis using local excitation and measurement,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 60–61, pp. 59–74, 2015.
- [51] S. Chesné and A. Deraemaeker, “Sur l’utilisation des transmissibilités pour la localisation des défauts dans les systèmes nos dispersifs.,” in *10ème Congrès Français d’Acoustique*.

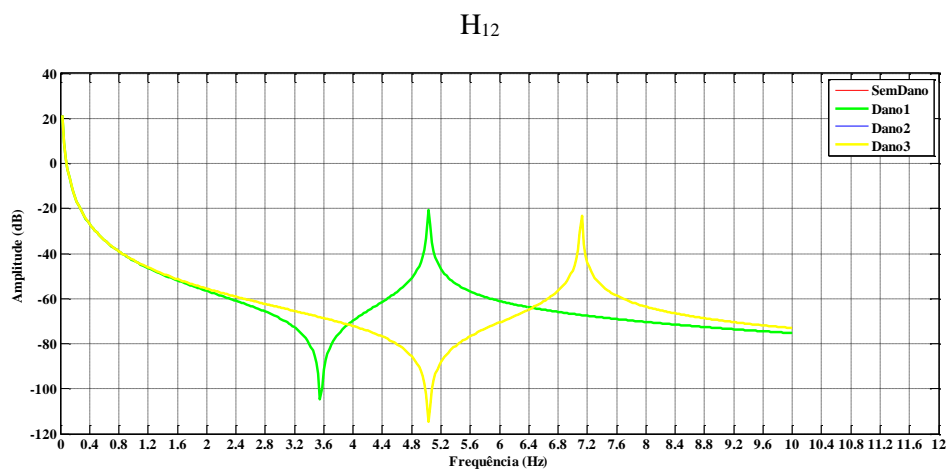
Anexos

Em complemento do trabalho já desenvolvido serão apresentadas aqui em anexo todos os casos considerados relevantes para o mesmo.

Anexo A: FRFs da Estrutura Triangular em Regime Livre-Livre:

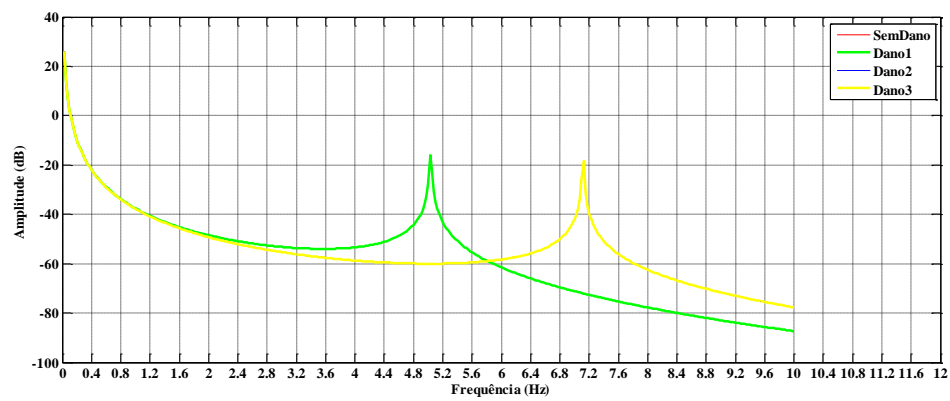


Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1



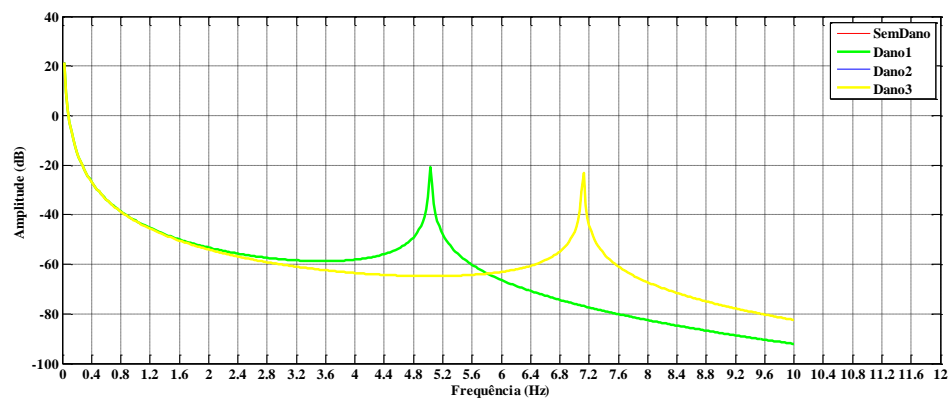
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

H₁₃



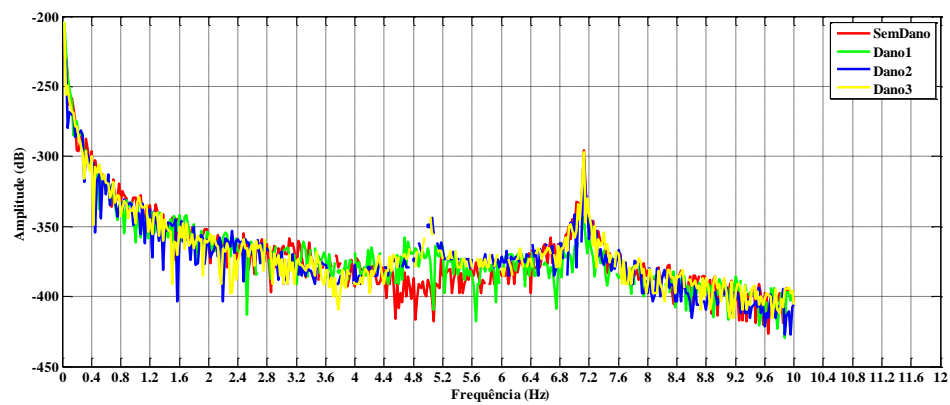
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

H₁₄

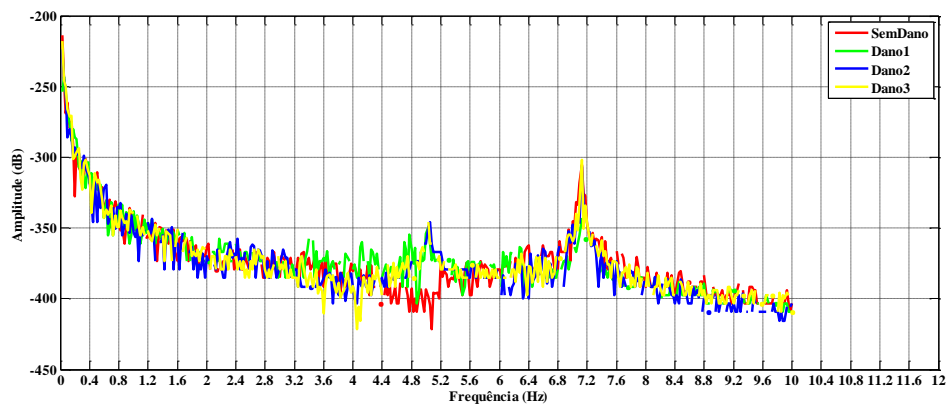


Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

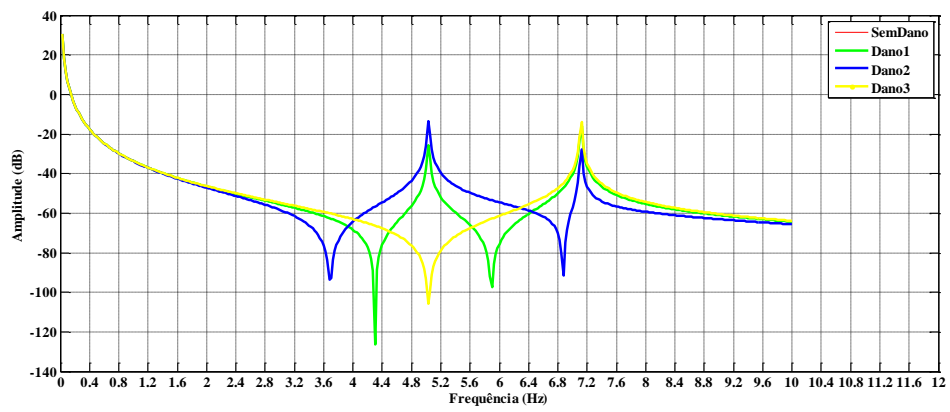
H₁₅



H₁₆

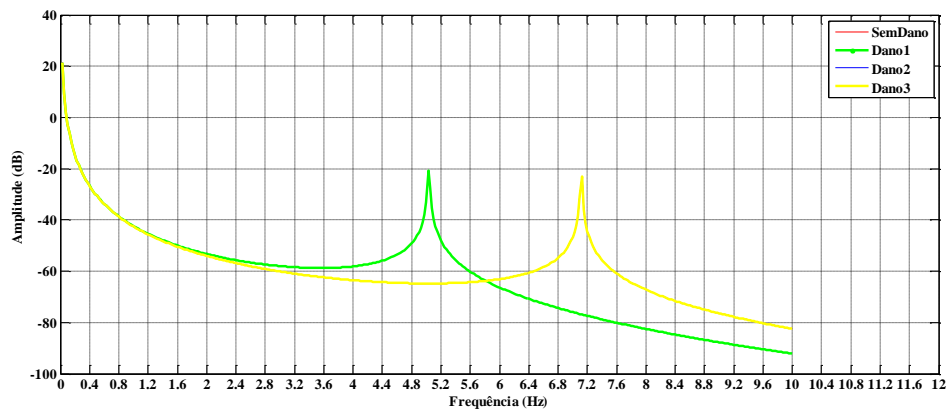


H₂₂



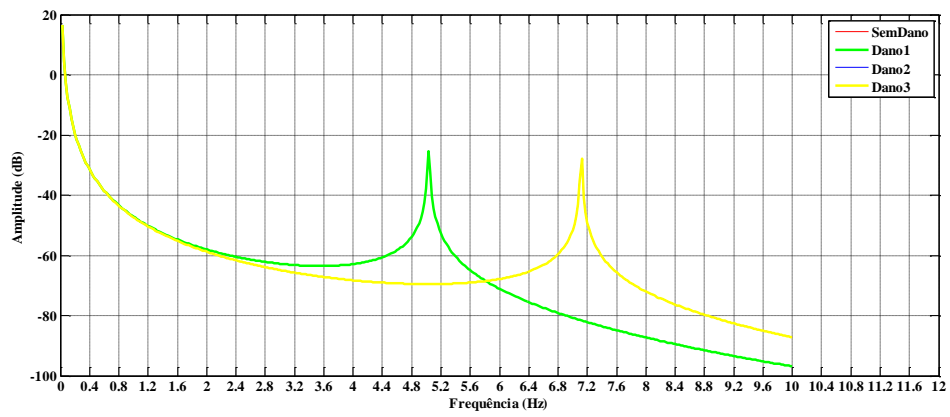
Sem Dano=Dano3

H₂₃



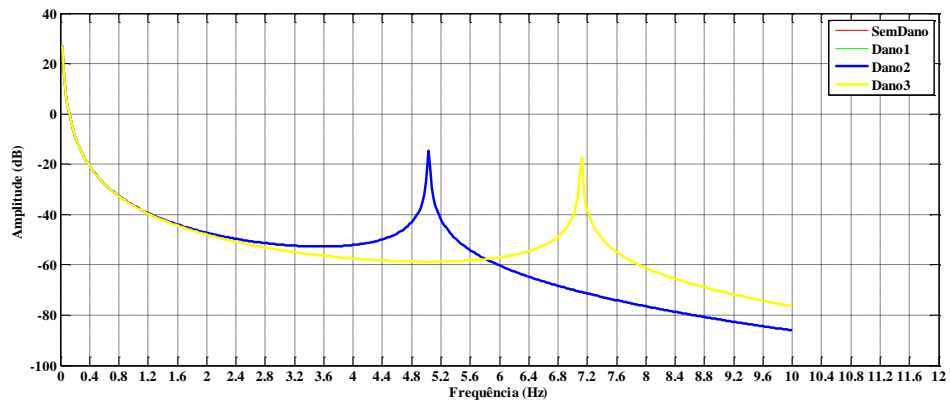
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

H₂₄



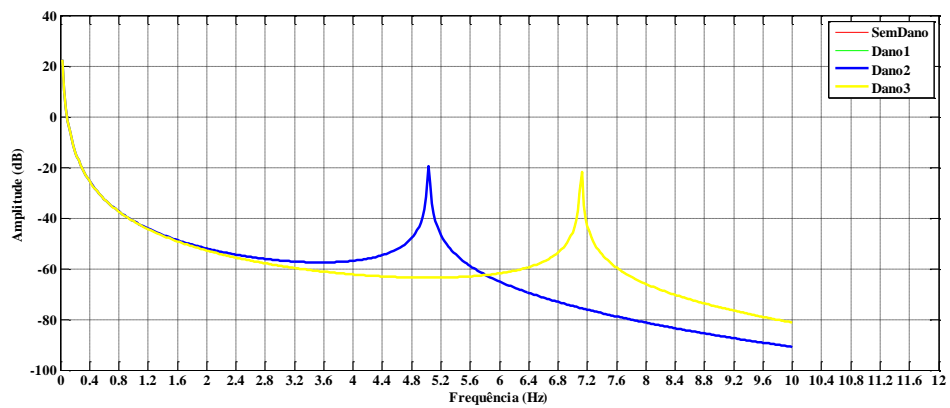
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

H₂₅



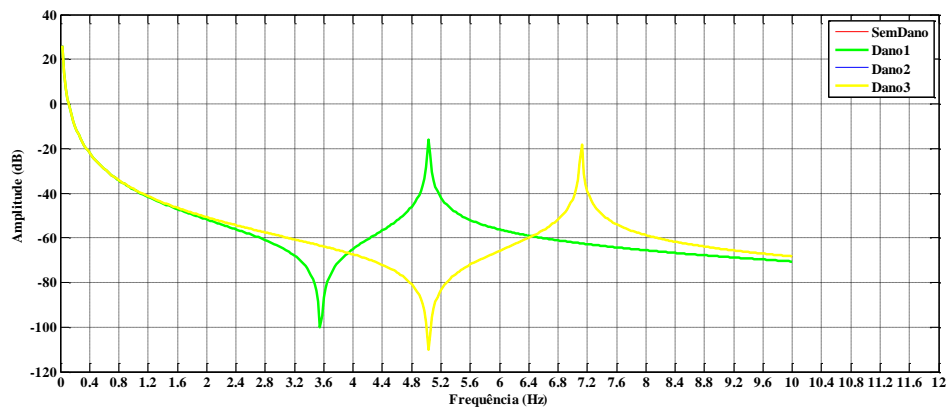
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano2

H₂₆



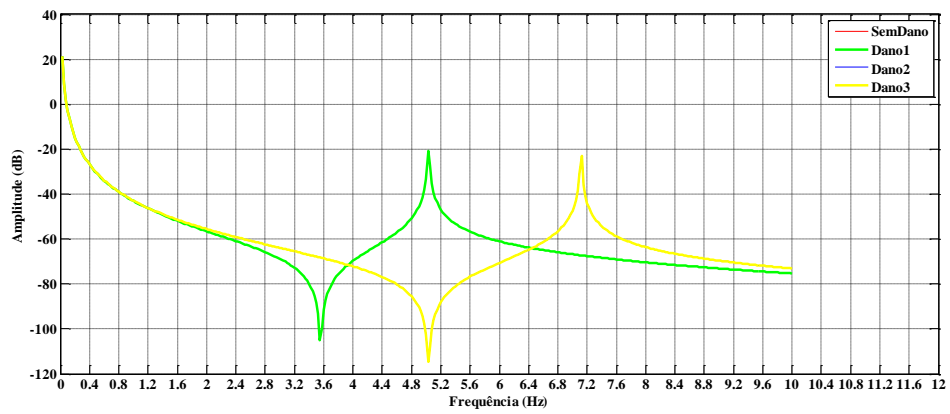
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano2

H₃₃



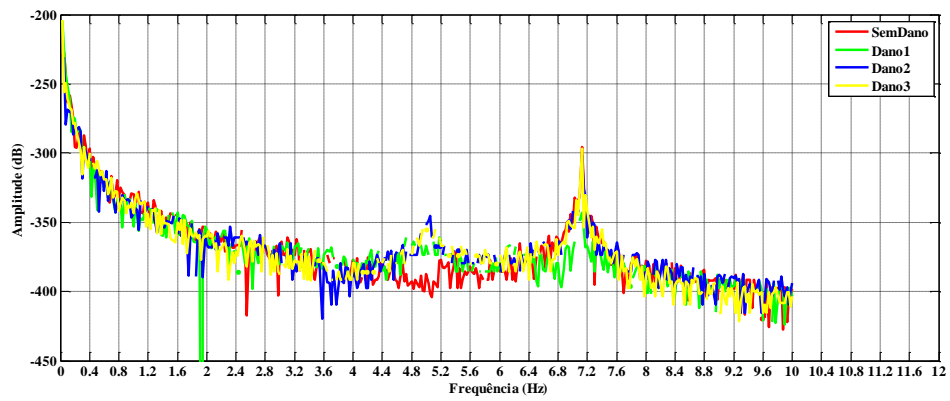
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

H₃₄

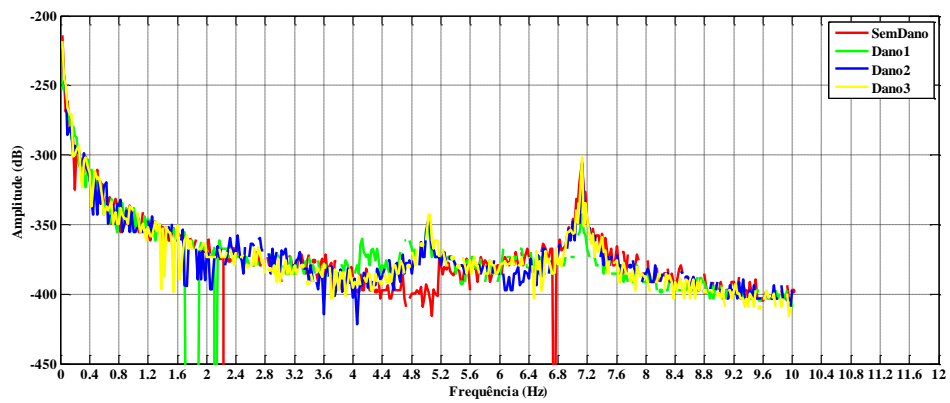


Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

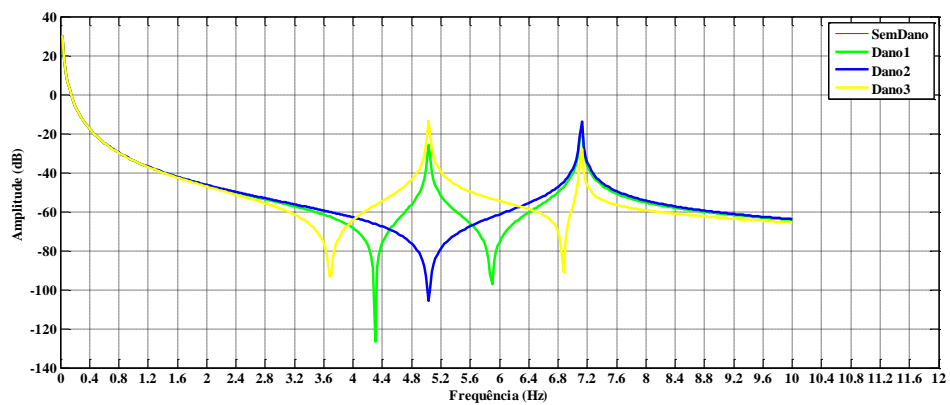
H₃₅



H₃₆

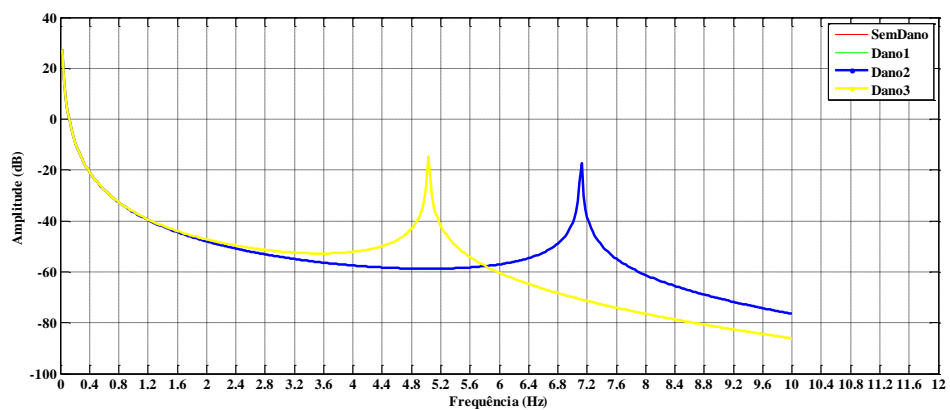


H₄₄



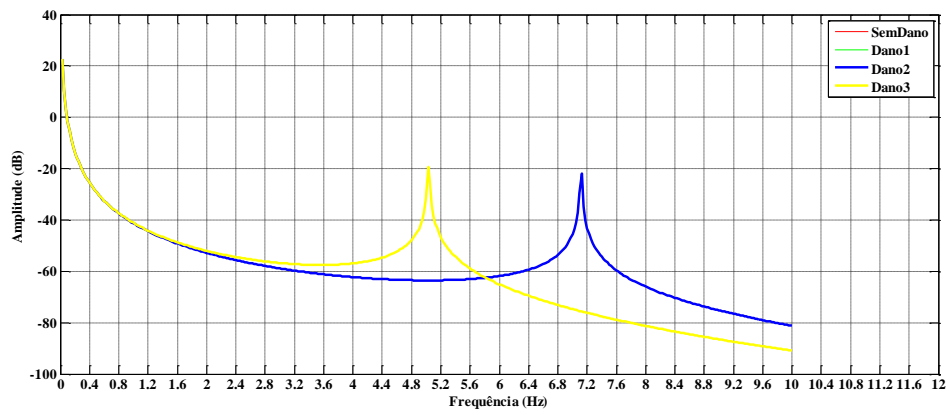
Sem Dano=Dano2

H₄₅



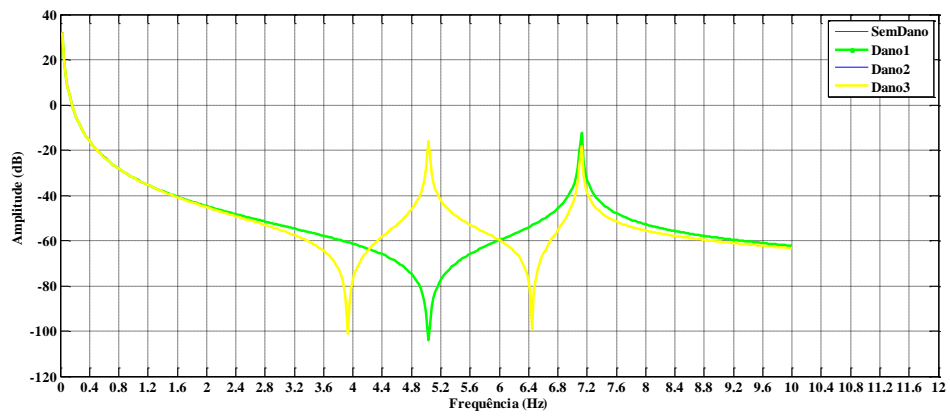
Todas sobrepostas exceto Dano3

H₄₆



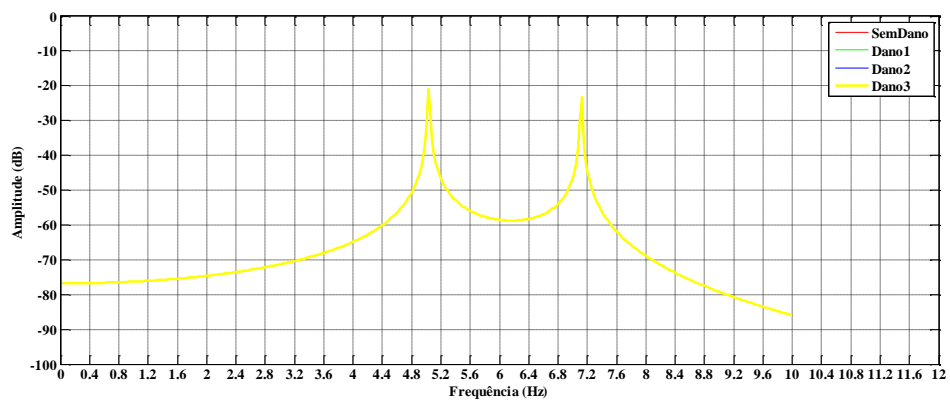
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano3

H₅₅



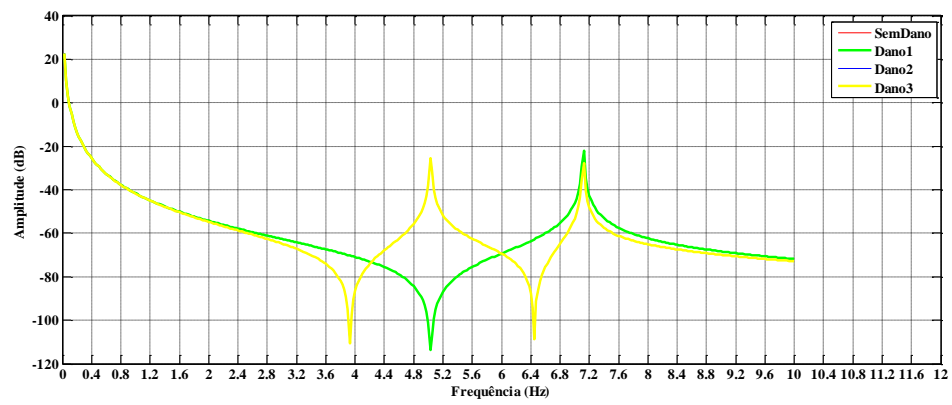
Sem Dano=Dano1 e Dano2=Dano3

H₅₆



Dano2=Dano3, o restante é lixo

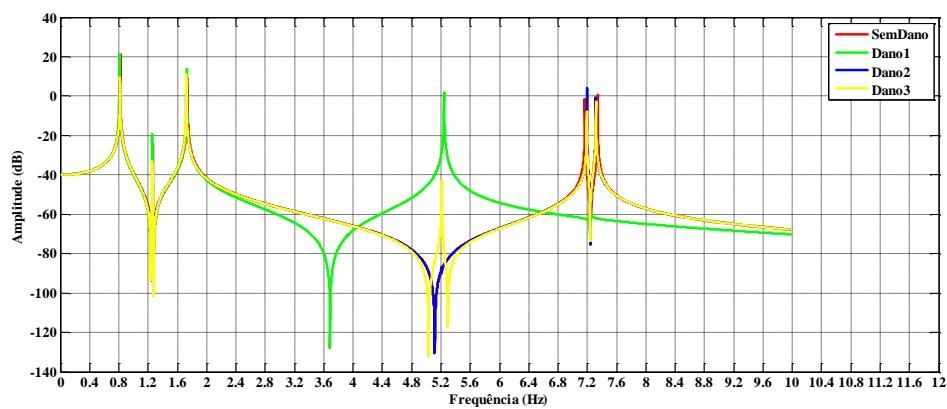
H₆₆



Sem Dano=Dano1 e Dano2=Dano3

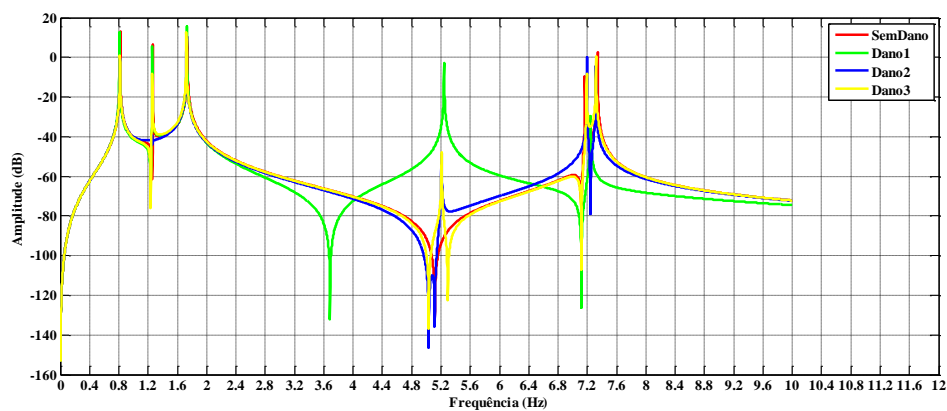
Anexo B: FRFs da Estrutura Triangular Biapoiada

H_{11}



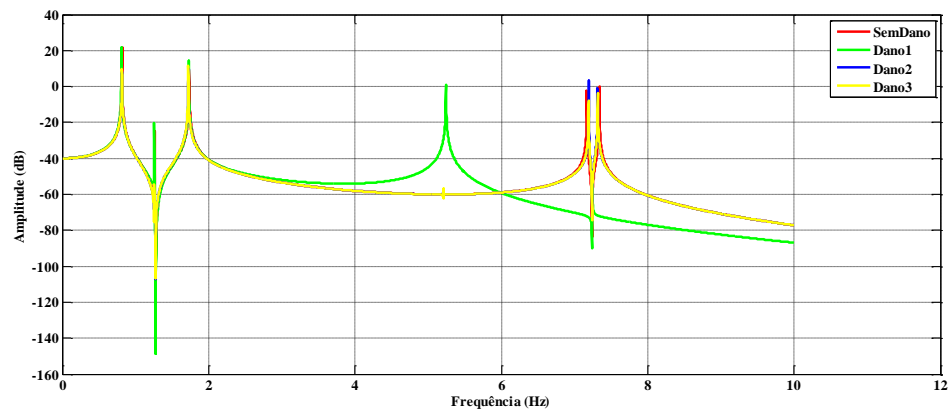
Sem Dano=Dano3

H_{12}



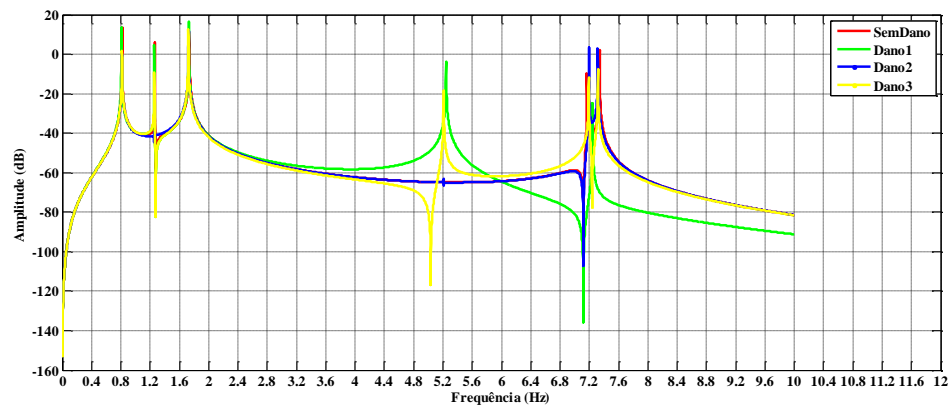
Sem Dano=Dano3 (quase)

H₁₃



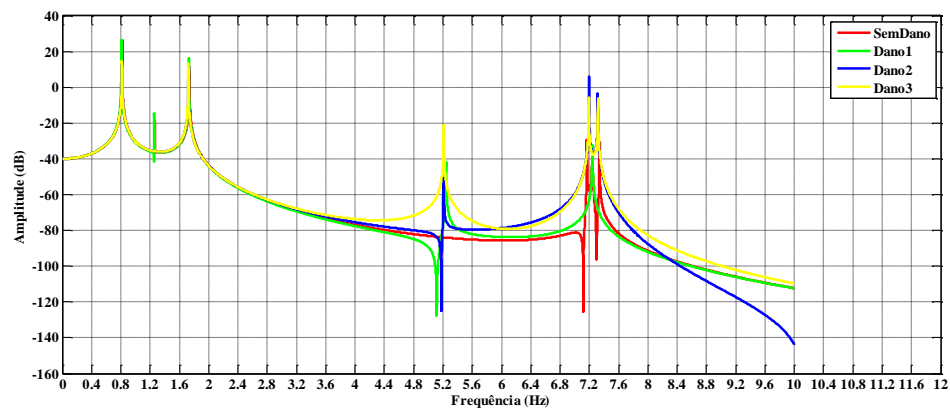
Todas as curvas sobrepostas exceto Dano1

H₁₄

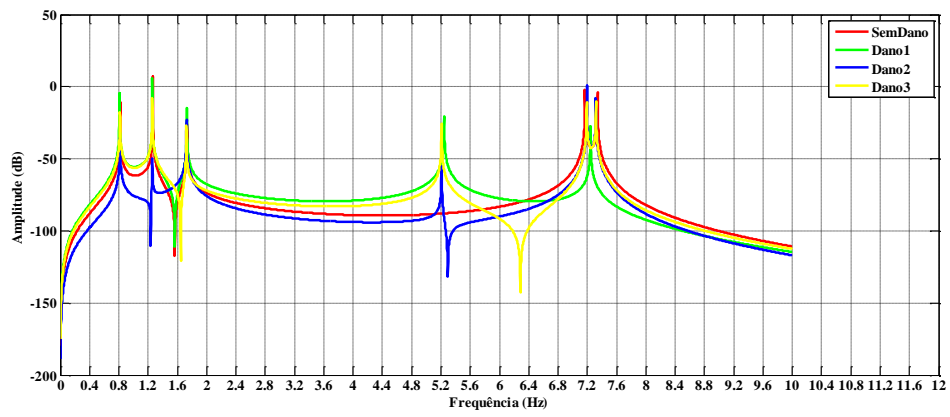


Sem Dano=Dano2 (quase)

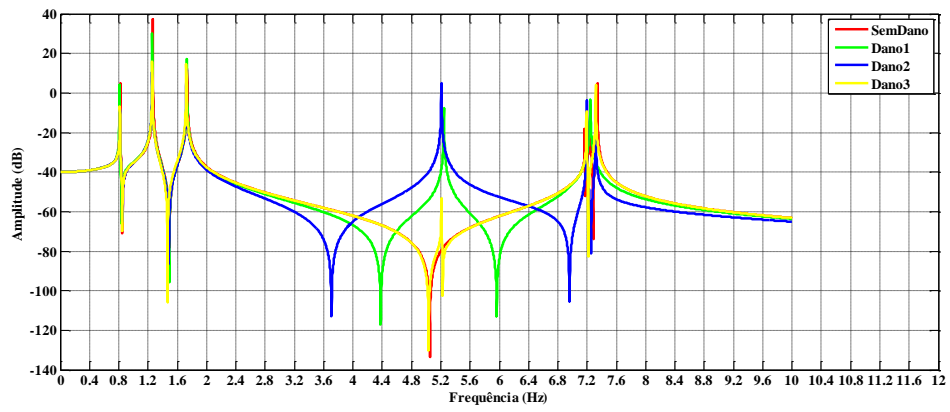
H₁₅



H_{16}

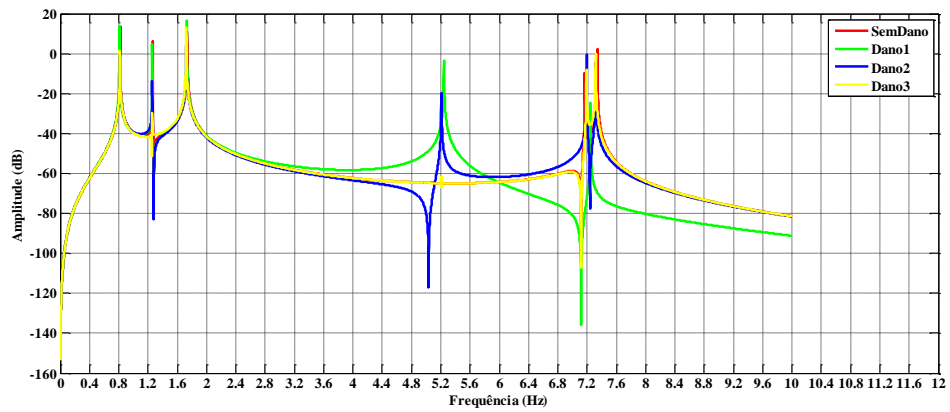


H_{22}



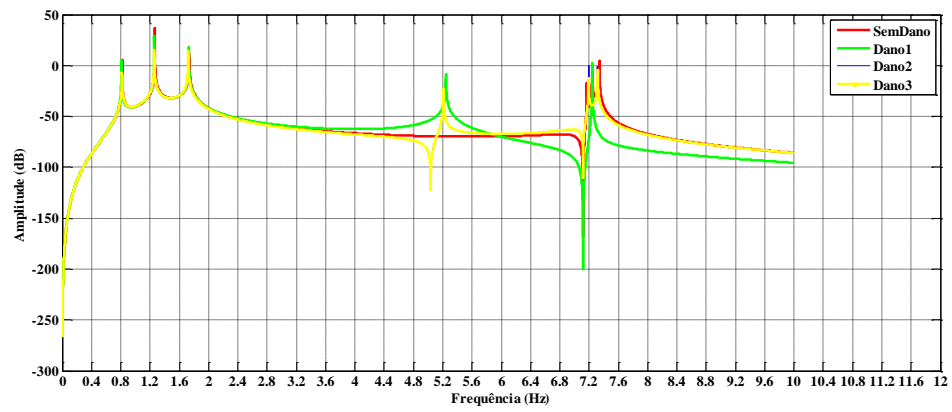
Sem Dano=Dano3

H_{23}



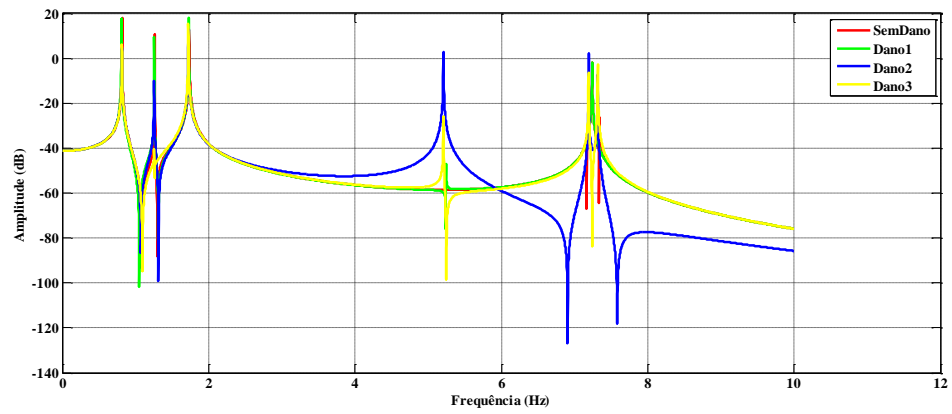
Sem Dano=Dano3

H₂₄



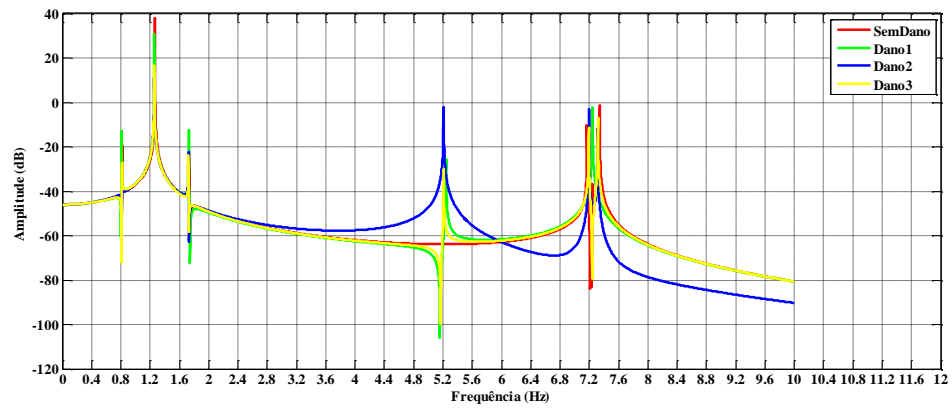
Dano2=Dano3

H₂₅

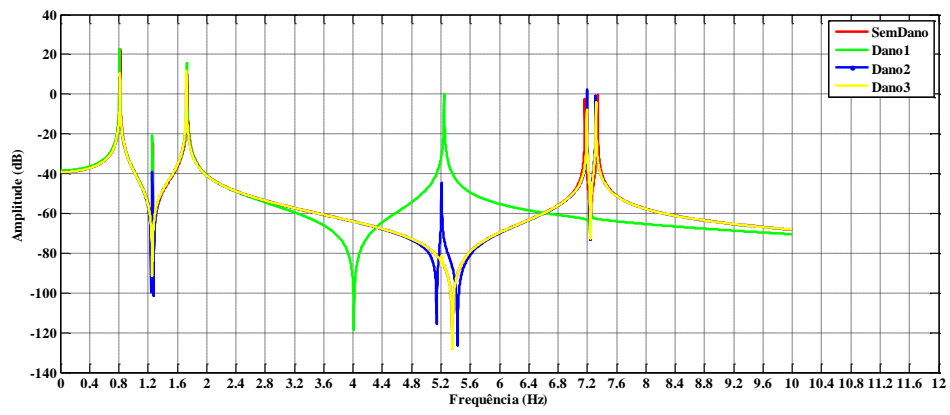


Dano1=Dano3

H₂₆

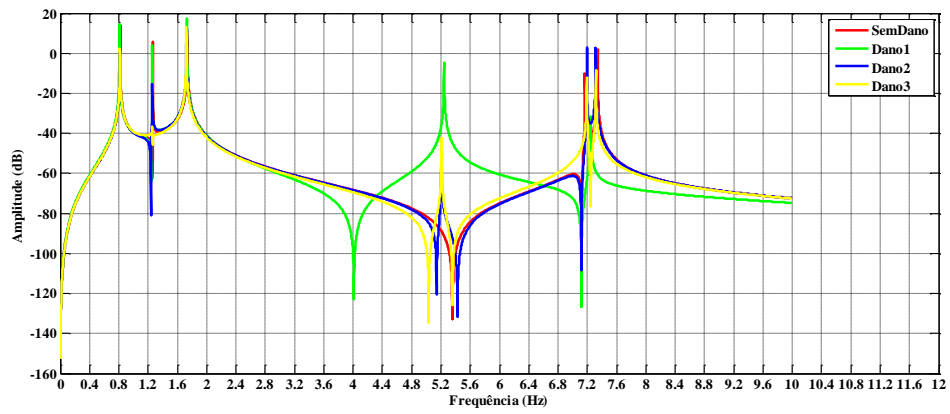


H₃₃

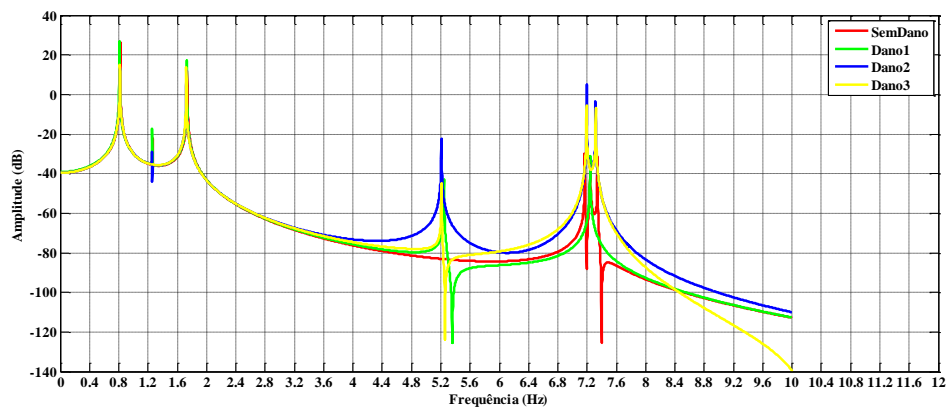


Sem Dano=Dano3

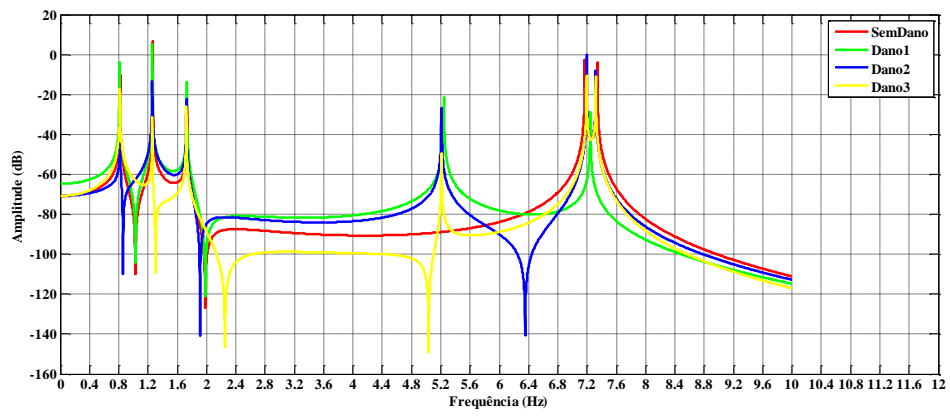
H₃₄



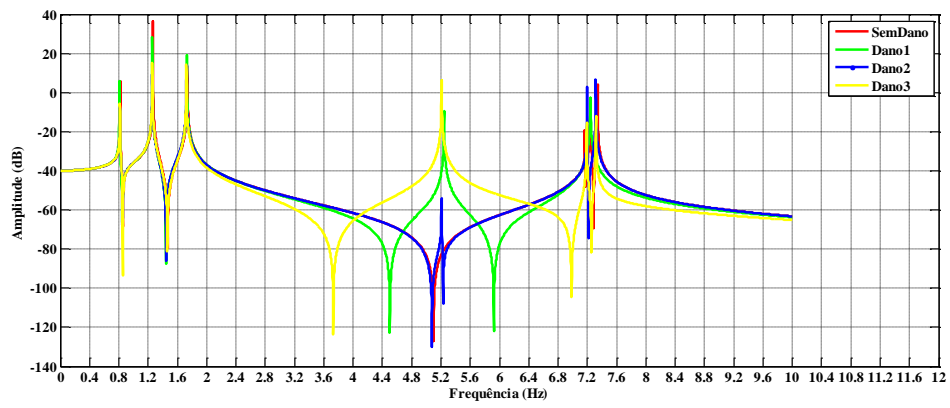
H₃₅



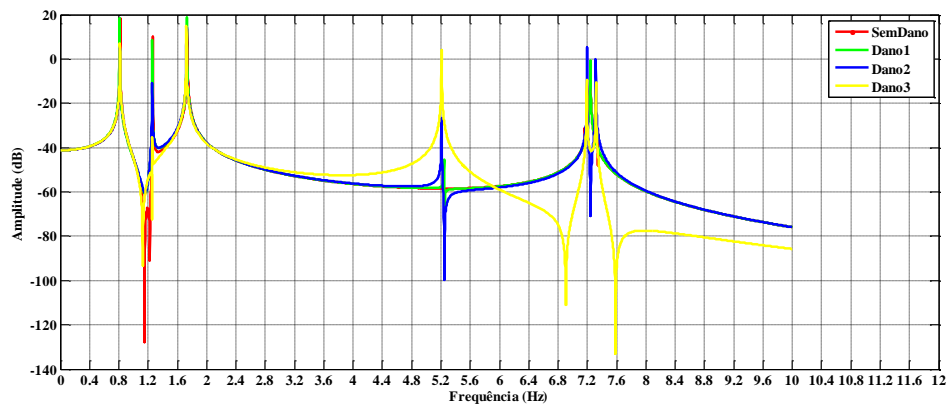
H₃₆



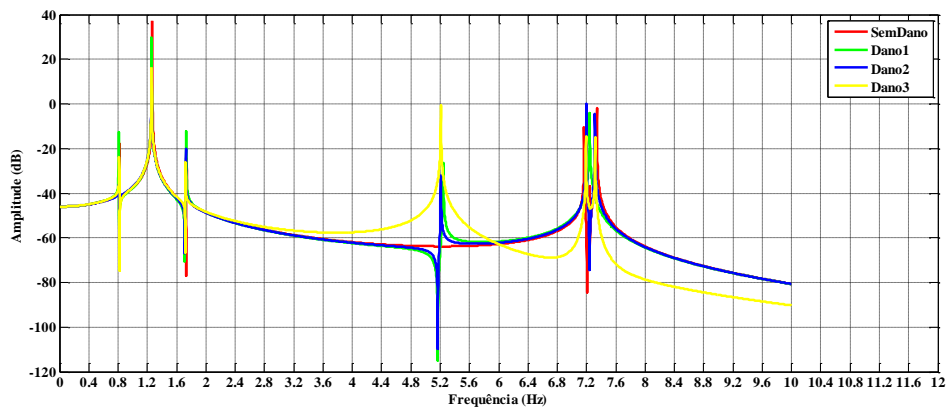
H₄₄



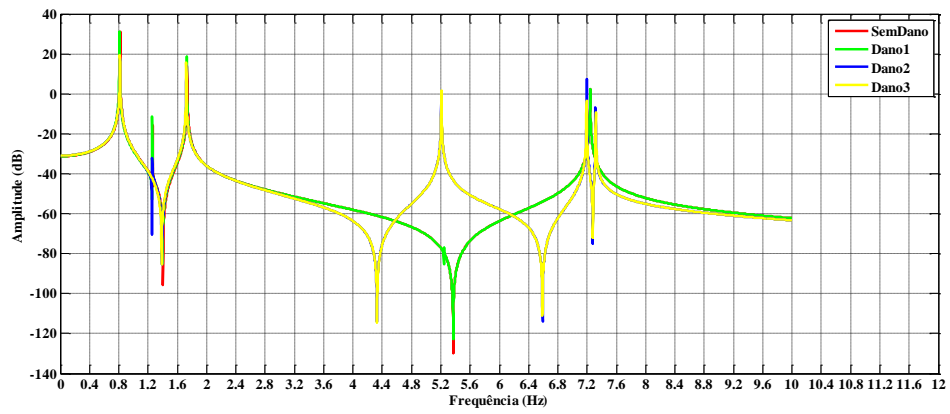
Sem Dano=Dano2
H₄₅



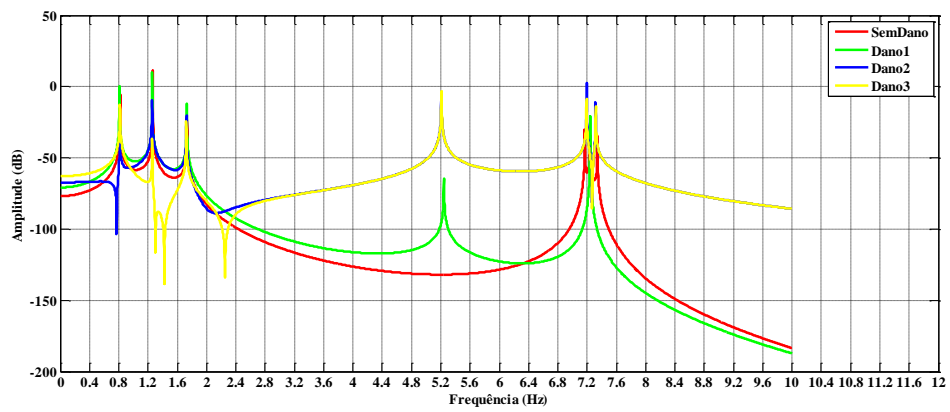
H₄₆



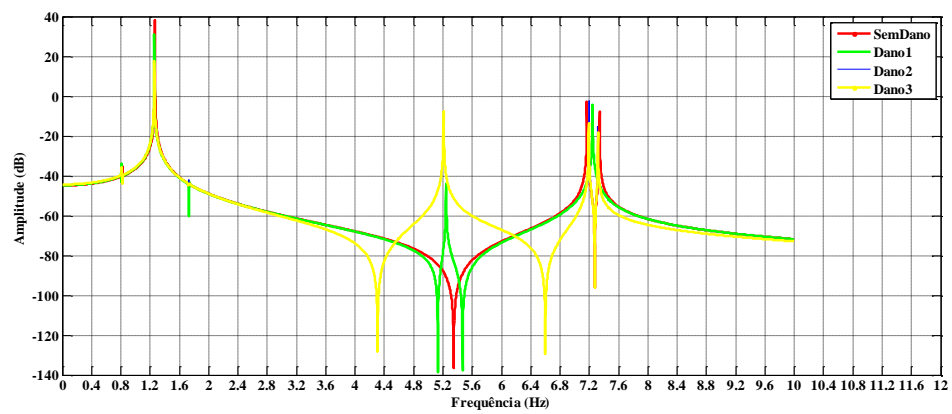
H₅₅



H₅₆



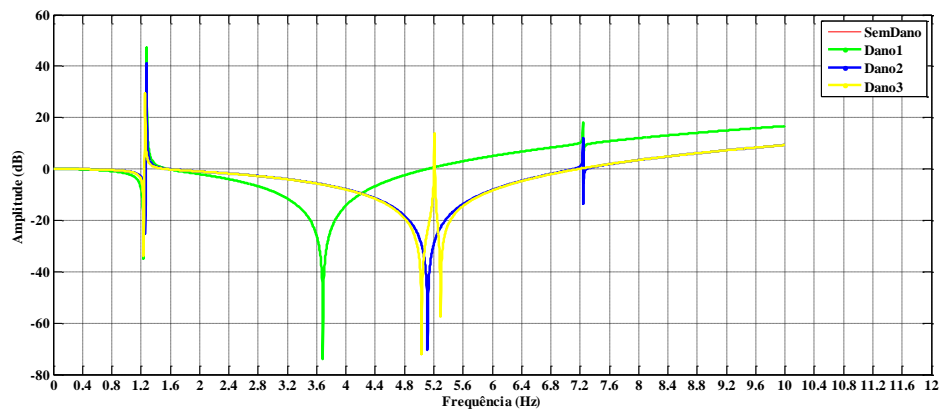
H₆₆



Dano3=Dano2

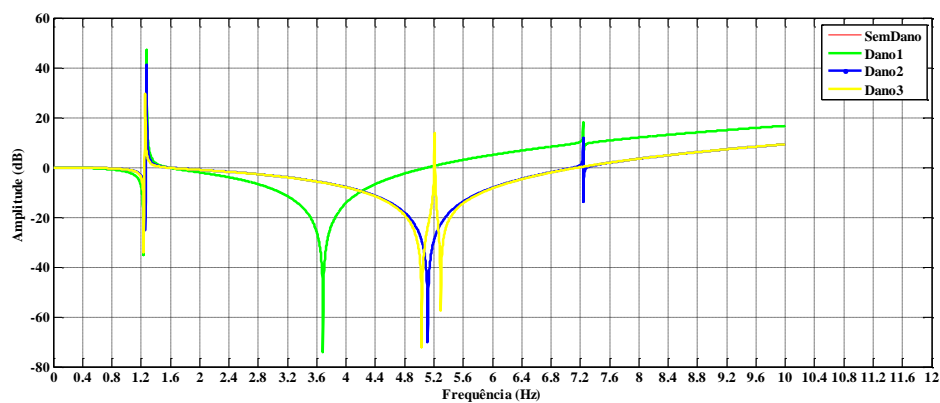
Anexo C: FTs da Estrutura Triangular Triângulo Biapoiada

TF1-3 Força 1



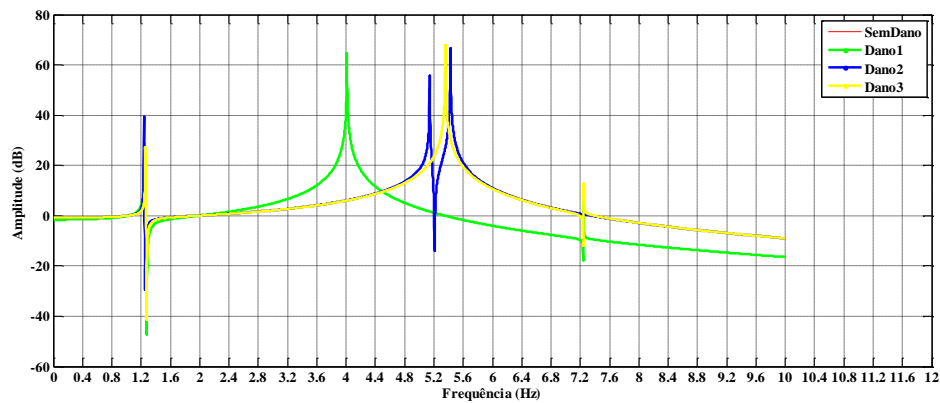
Sem Dano=Dano2

TF1-3 Força 2



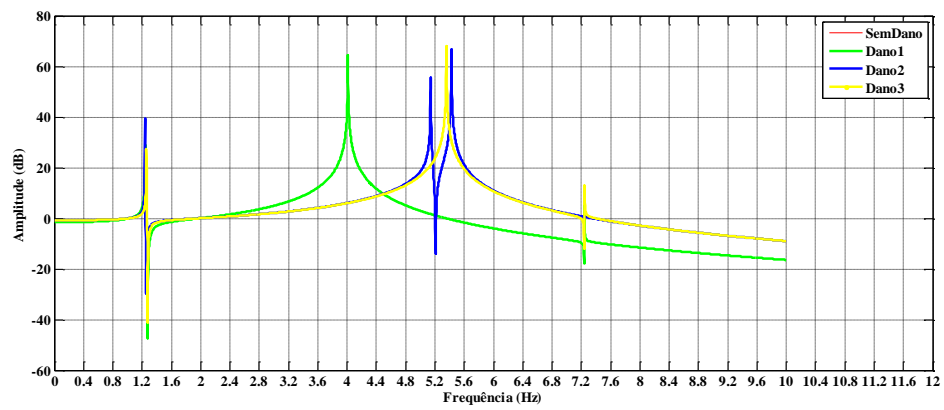
Sem Dano=Dano2

TF1-3 Força 3



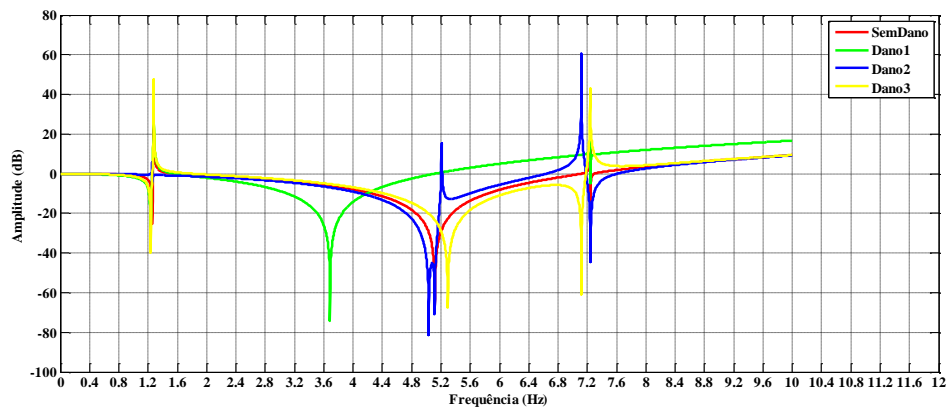
Sem Dano=Dano3

TF1-3 Força 4

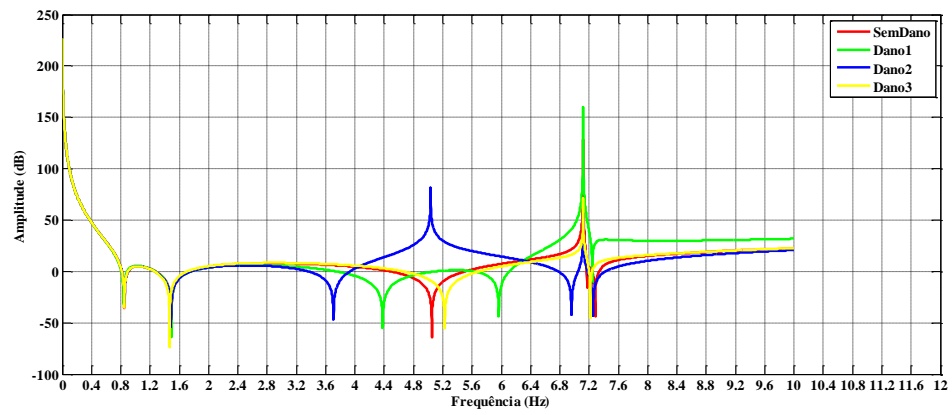


Sem Dano=Dano3

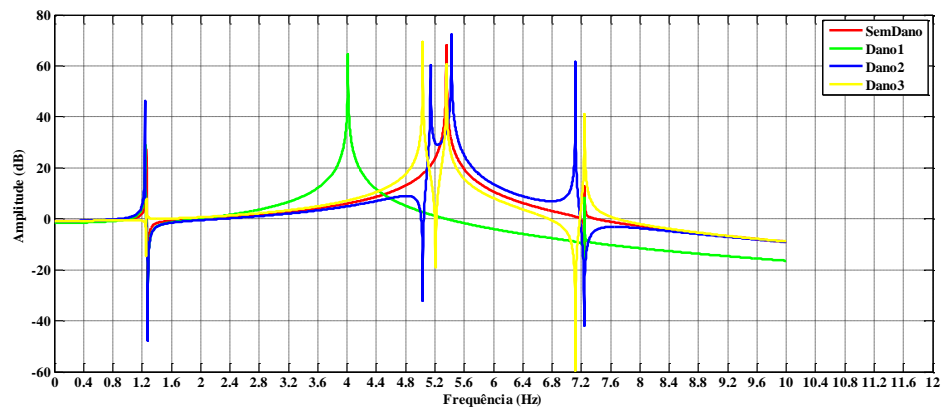
TF2-4 Força 1



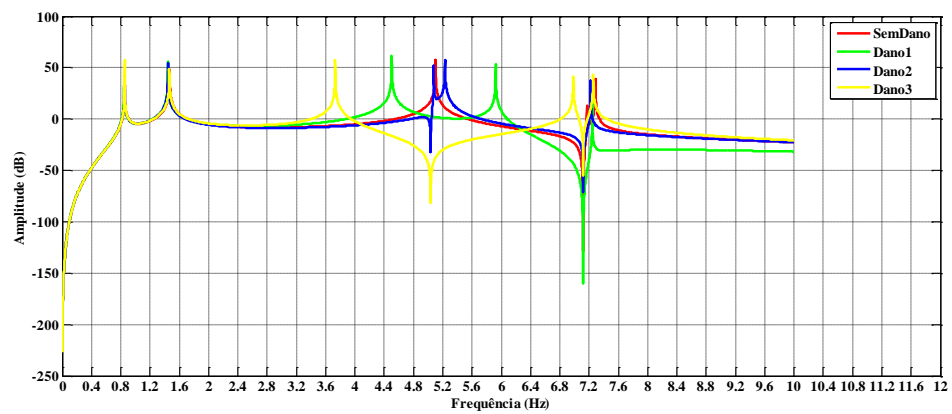
TF2-4 Força 2



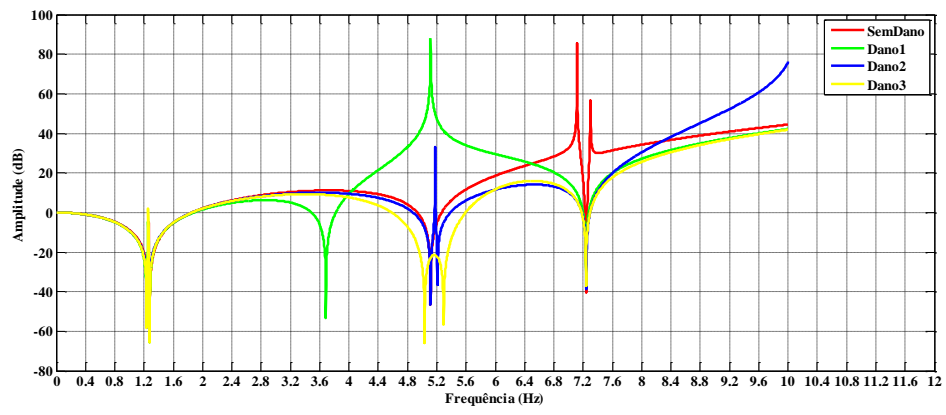
TF2-4 Força 3



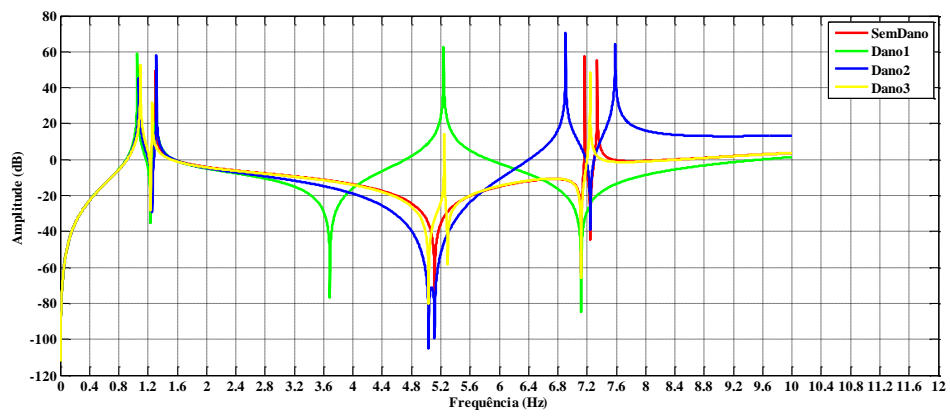
TF2-4 Força 4



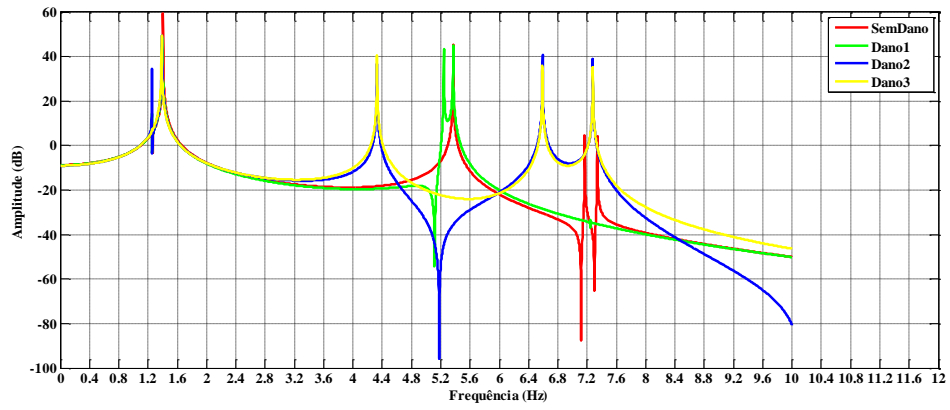
TF1-5 Força 1



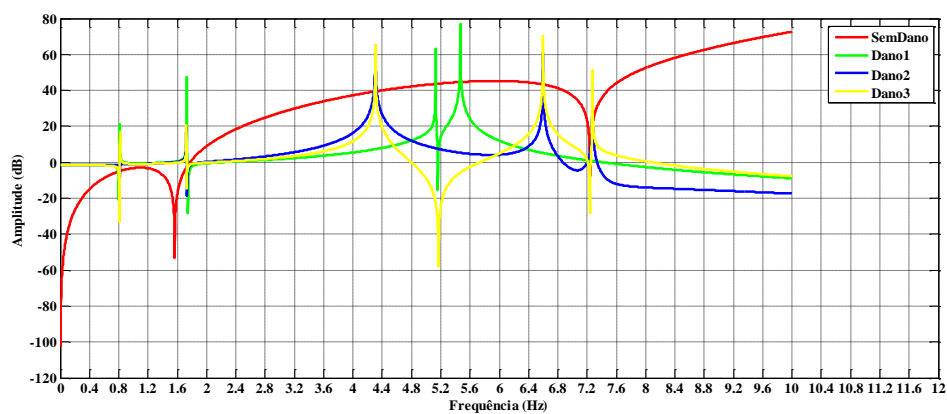
TF1-5 Força 2



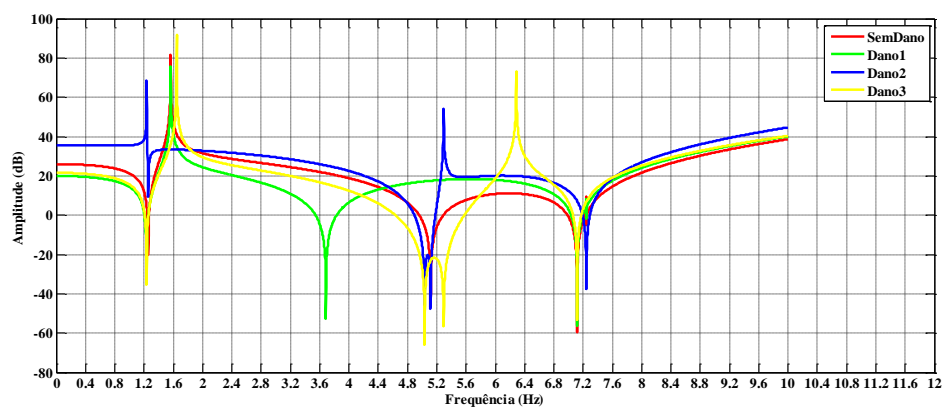
TF1-5 Força 5



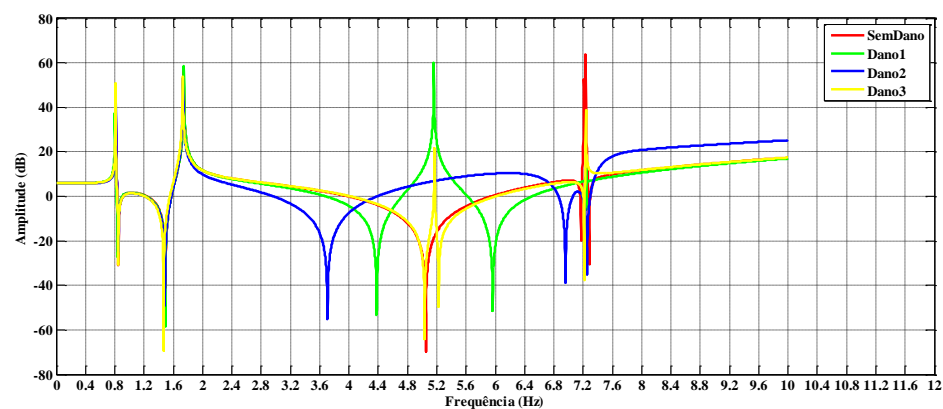
TF1-5 Força 6



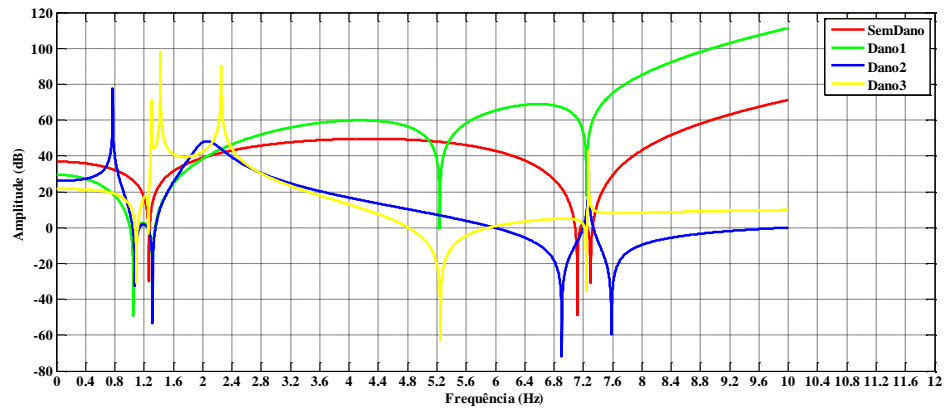
TF2-6 Força 1



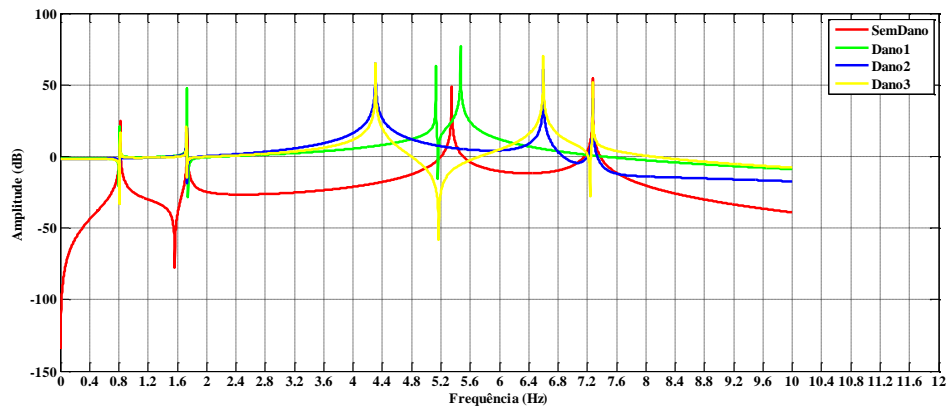
TF2-6 Força 2



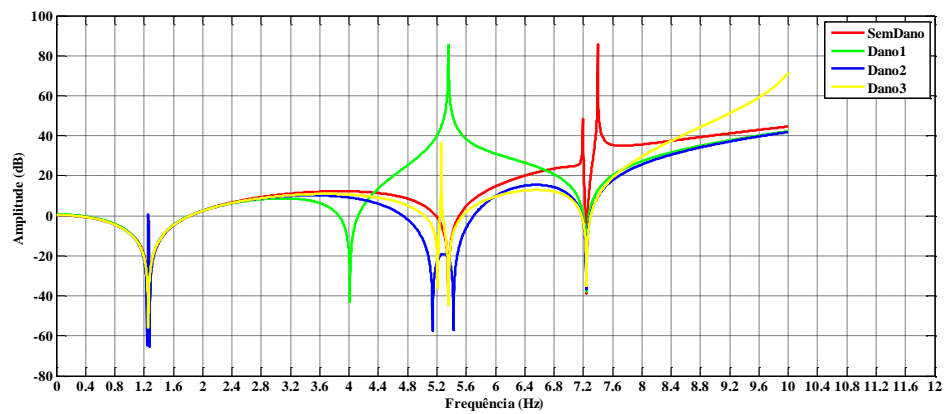
TF2-6 Força 5



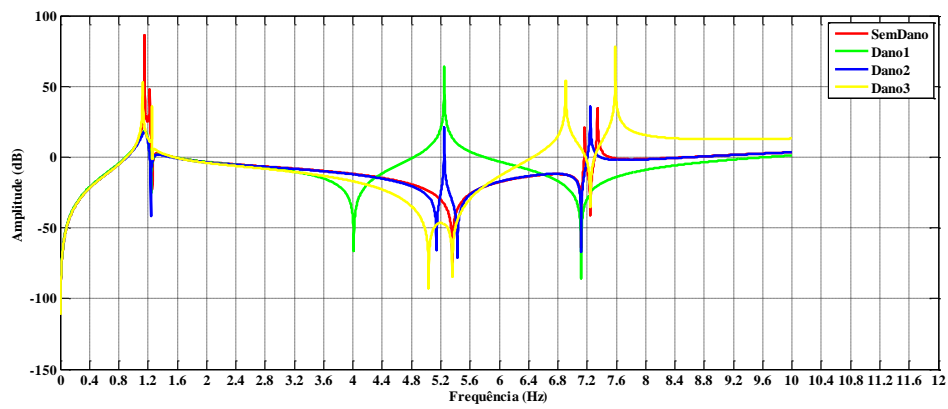
TF2-6 Força 6



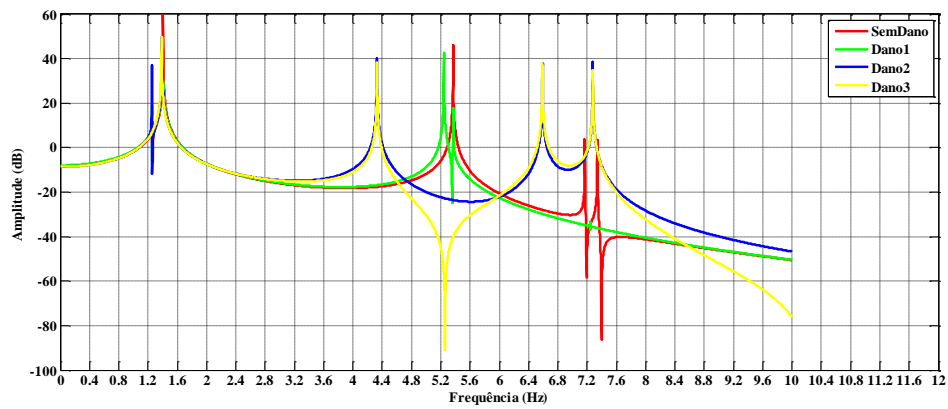
TF3-5 Força 3



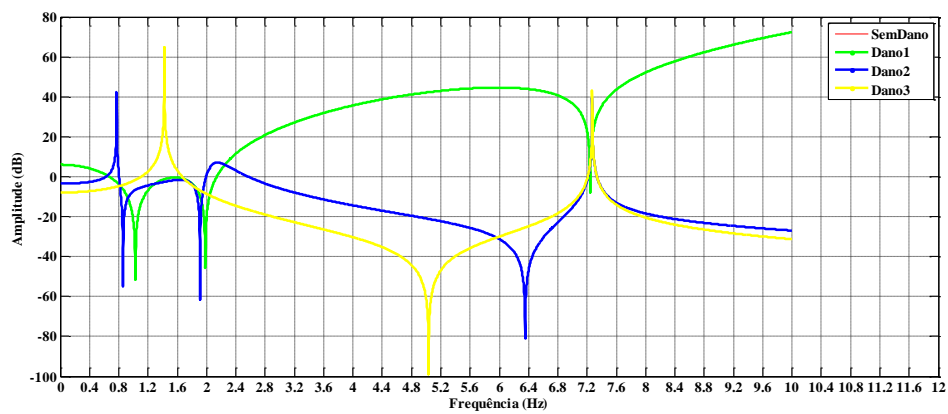
TF3-5 Força 4



TF3-5 Força 5

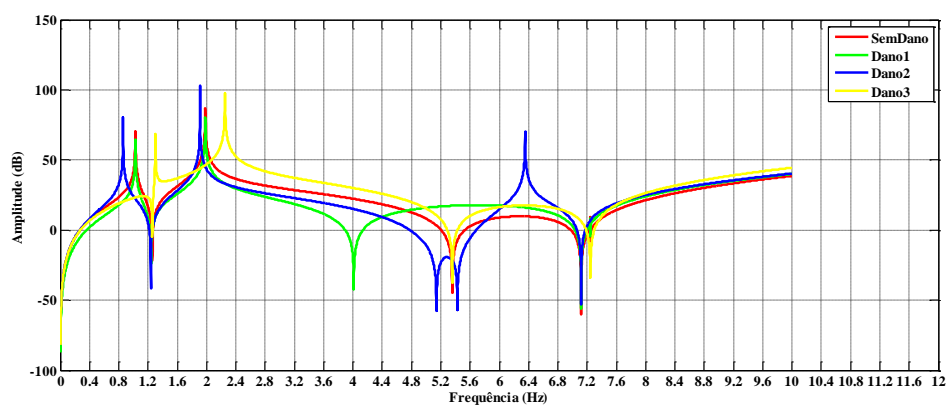


TF3-5 Força 6

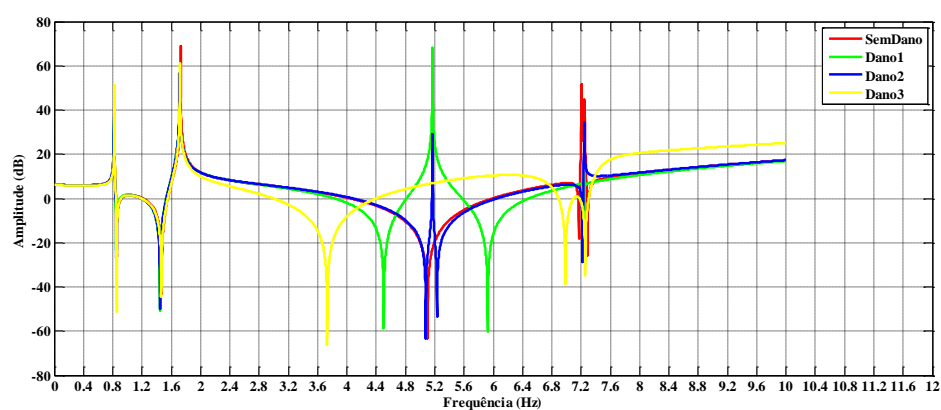


Sem Dano=Dano3

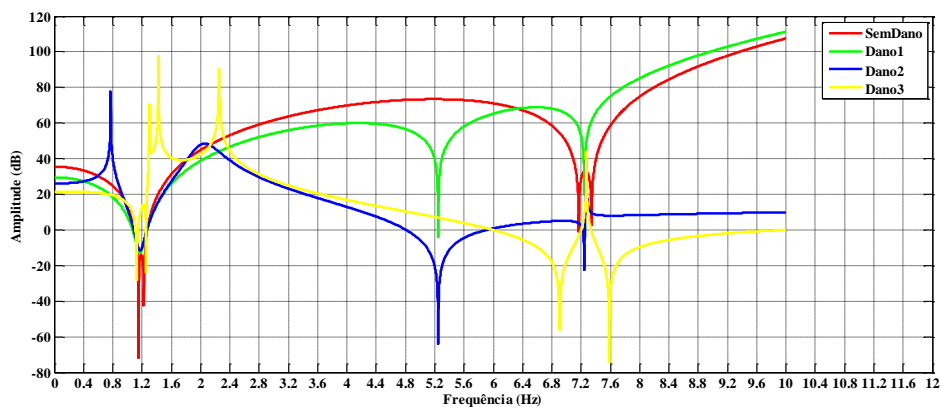
TF4-6 Força 3



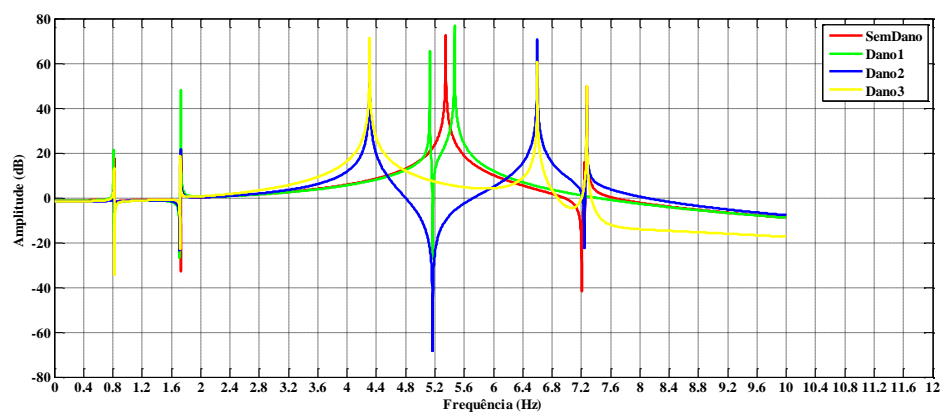
TF4-6 Força 4



TF4-6 Força 5



TF4-6 Força 6



Anexo D: MatLab m-files

Sistema massa-mola linear:

```
% Modelo Discreto 4 GDL Sem Dano
clear all;
clc;
%
[fid,msg]=fopen('FRF_Discreto_4GDL.dat','w'); % criar ficheiro de escrita

nnos=4; %n° total de nos
dofs=1*nnos; % n° total de g.d.l do EF

%I.2Inicialização de matrizes
K=zeros(dofs,dofs); %matriz de rigidez global
K(1,2)=-1000;
K(2,3)=-1000;
K(3,4)=-1000;
K=K+K';
K(1,1)=1000;
K(2,2)=2000;
K(3,3)=2000;
K(4,4)=1000;
%
M=eye(dofs,dofs); %matriz de massa global

%cálculo das frequencias naturais e dos modos de vibração
modos=4; % modos de vibração
[U,w]= eig(K,M);
display('Frequencias naturais do sistema global em Hz:');

for i=1:modos
    disp(sqrt(w(i,i))/(2*pi)); %conversão para Hz
end

% % Construção de FRF
% % Vector de frequencias
f_final=12; % gama de frequencias
res=384; % numero total frequencias
f_inicial=f_final/res; % frequencia inicial
f=zeros(f_final,1); % vector de frequencias
%
for i=1:res
    if i==1
        f(i)=f_inicial;
    else
        f(i)=f(i-1)+f_final/res;
    end
end
end
```

```

% % Construção da matriz de rigidez dinâmica e da matriz das FRF's
for i=1:res
    Z=K-((2*pi*f(i))^2)*M; % Matriz da rigidez dinâmica
    H=inv(Z); % Matriz da Receptância (FRF)
    fprintf(fid,'%d\t',f(i)); % escrita das frequências no ficheiro criado
anteriormente
    for k=1:dofs
        for j=1:dofs
            fprintf(fid,'%3.10g\t',(H(k,j)));
            %fprintf(fid,'%3.10g\t',20*log10(abs(H(k,j)))); % escrever FRFs
em decibel
        end
    end
    fprintf(fid,'\n'); % Mudar de linha após escrever para uma frequência
end
status=fclose(fid); % mandar fechar o ficheiro após escrita

```

Sistema massa-mola linear com elemento 1 danificado:

Nota: Para o dano nos restantes elementos, o procedimento é análogo

```

% Modelo Discreto 4 GDL Dano 1
clear all;
clc;
%
[fid,msg]=fopen('FRF_Discreto_4GDL_Dano1.dat','w'); % criar ficheiro de
escrita

nnos=4; %nº total de nos
dofs=1*nnos; % nº total de g.d.l do EF

%I.2Inicialização de matrizes
K=zeros(dofs,dofs); %matriz de rigidez global
K(1,2)=-500;
K(2,3)=-1000;
K(3,4)=-1000;
K=K+K';
K(1,1)=500;
K(2,2)=1500;
K(3,3)=2000;
K(4,4)=1000;
%
M=eye(dofs,dofs); %matriz de massa global

%cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração
modos=4; % modos de vibração
[U,w]= eig(K,M);
display('Frequências naturais do sistema global em Hz:');
%
for i=1:modos
    disp(sqrt(w(i,i))/(2*pi)); %conversão para Hz
end
%

```

```

% % Construção de FRF
% % Vector de frequencias
f_final=12; % gama de frequencias
res=384; % numero total de frequencias
f_inicial=f_final/res; % frequencia inicial
f=zeros(f_final,1); % vector de frequencias
%
for i=1:res
    if i==1
        f(i)=f_inicial;
    else
        f(i)=f(i-1)+f_final/res;
    end
end
% % Construção da matriz de rigidez dinamica e da matriz das FRF's
for i=1:res
    Z=K-((2*pi*f(i))^2)*M; % Matriz da rigidez dinamica
    H=inv(Z); % Matriz da Receptância (FRF)
    fprintf(fid,'%d\t',f(i)); % escrita das frequencias no ficheiro criado
    anteriormente
    for k=1:dofs
        for j=1:dofs
            fprintf(fid,'%3.10g\t',H(k,j));
            %fprintf(fid,'%3.10g\t',20*log10(abs(H(k,j)))); % escrever FRFs
em decibel
        end
    end
    fprintf(fid,'\n'); % Mudar de linha após escrever para uma frequencia
end
status=fclose(fid); % mandar fechar o ficheiro após escrita

```

Sistema massa-mola triangular:

```
% Triangulo 3 barras equilátero biapoiado
%

clear all;
clc;
%
[fid,msg]=fopen('Triangulo_Discreto_Massa_Mola.dat','w'); % criar ficheiro
de escrita
%
%
Li= 1;
teta= [0 60 -60];
L= [Li Li Li];
Nos= [ 1 2; 1 3; 2 3];
%

K= zeros(6);
M= zeros(6);
%F= zeros(6,1);
%U= zeros(6,1);
%
%
%
for i= 1:3 % numero de elementos, neste caso sao 3
    %
    % matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais
    %
    ke= zeros(2);
    ke(1,1)= 1000/L(i);
    ke(1,2)= -1000/L(i);
    ke(2,1)= -1000/L(i);
    ke(2,2)= 1000/L(i);
    %
    %
    % matriz de massa do elemento em coordenadas locais
    %
    C=L(i);
    %
    me= zeros(2);
    me(1,1)= 1;
    me(1,2)= 0;
    me(2,1)= 0;
    me(2,2)= 1;
    %
    me=C*me;
    %
    %
    %
    % matriz de transformação de coordenadas
    %
    T= [cosd(teta(i))  sind(teta(i))  0  0;...
        0  0  cosd(teta(i))  sind(teta(i))];
    %
    % matriz de rigidez em coordenadas globais
    %
    kg= T' * ke * T;
    %
```



```

mg= T' * me * T;
%
% montagem
%
noi= Nos(i,1);
noj= Nos(i,2);
%
K(noi*2-1:noi*2,noi*2-1:noi*2)= K(noi*2-1:noi*2,noi*2-
1:noi*2)+kg(1:2,1:2);
K(noi*2-1:noi*2,noj*2-1:noj*2)= K(noi*2-1:noi*2,noj*2-
1:noj*2)+kg(1:2,3:4);
K(noj*2-1:noj*2,noi*2-1:noi*2)= K(noj*2-1:noj*2,noi*2-
1:noi*2)+kg(3:4,1:2);
K(noj*2-1:noj*2,noj*2-1:noj*2)= K(noj*2-1:noj*2,noj*2-
1:noj*2)+kg(3:4,3:4);
%
%
M(noi*2-1:noi*2,noi*2-1:noi*2)= M(noi*2-1:noi*2,noi*2-
1:noi*2)+mg(1:2,1:2);
M(noi*2-1:noi*2,noj*2-1:noj*2)= M(noi*2-1:noi*2,noj*2-
1:noj*2)+mg(1:2,3:4);
M(noj*2-1:noj*2,noi*2-1:noi*2)= M(noj*2-1:noj*2,noi*2-
1:noi*2)+mg(3:4,1:2);
M(noj*2-1:noj*2,noj*2-1:noj*2)= M(noj*2-1:noj*2,noj*2-
1:noj*2)+mg(3:4,3:4);
%
end
%
%
%
% apoios
%
%
gdlfixos=[1 2 4]; % graus de liberdade fixos
todososgdl=1:6; % numero de graus de liberdade, neste caso são 2 por nós.
logo dá 6 gdl
%
gdllivres= setdiff(todososgdl,gdlfixos);
%
%
%
kf=K(gdllivres,gdllivres);
mf=M(gdllivres,gdllivres);

% cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração
modos=length(gdllivres); % modos de vibração
[U,w]= eig(kf,mf);
display('frequências naturais do sistema global em hz:');
%
for i=1:modos
    disp(sqrt(w(i,i))/(2*pi)); % conversão para hz
end

%
% % Construção de FRF
% % Vector de frequências
f_final=10; % gama de frequências
res=400; % numero total de frequências
f_inicial=f_final/res; % frequência inicial

```

```

f=zeros(f_final,1); % vector de frequencias
%
%
%
for i=1:res
    if i==1
        f(i)=f_inicial;
    else
        f(i)=f(i-1)+f_final/res;
    end
end
% Construção da matriz de rigidez dinamica e da matriz das FRF's
for i=1:res
    Z=kf-((2*pi*f(i))^2)*mf; % Matriz da rigidez dinamica
    H=inv(Z); % Matriz da Receptância (FRF)
    fprintf(fid,'%d\t',f(i)); % escrita das frequencias no ficheiro criado
    anteriormente
    for k=1:length(gdllivres)
        for j=1:length(gdllivres)
            fprintf(fid,'%3.10g\t',(H(k,j)));
            %fprintf(fid,'%3.10g\t',20*log10(abs(H(k,j)))); % escrever FRFs
em decibel
        end
    end
    fprintf(fid,'\n'); % Mudar de linha após escrever para uma frequencia
end
status=fclose(fid); % mandar fechar o ficheiro após escrita
%

```

Estrutura Treliçada massa-mola:

```

%
clear all;
clc;
%
[fid,msg]=fopen('Trelica_7_barras.dat','w'); % criar ficheiro de escrita
%
%
Li= 1;
teta= [0 60 -60 -60 60 0 0];
L= [Li Li Li Li Li Li Li];
Nos= [ 1 2; 1 3; 2 3; 1 4; 2 5; 4 3; 3 5];
%

K= zeros(10);
M= zeros(10);

for i= 1:7 % numero de elementos, neste caso sao 7
    %
    % matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais
    %
    ke= zeros(2);
    ke(1,1)= 1000/L(i);
    ke(1,2)= -1000/L(i);
    ke(2,1)= -1000/L(i);
    ke(2,2)= 1000/L(i);
    %

```

```

%
% matriz de massa do elemento em coordenadas locais
%
C=L(i);
%
me= zeros(2);
me(1,1)= 1;
me(1,2)= 0;
me(2,1)= 0;
me(2,2)= 1;
%
me=C*me;
%
%
%
% matriz de transformação de coordenadas
%
T= [cosd(teta(i))  sind(teta(i))  0  0;...
    0  0  cosd(teta(i))  sind(teta(i))];
%
% matriz de rigidez em coordenadas globais
%
kg= T' * ke * T;
%
mg= T' * me * T;
%
% assemblagem
%
noi= Nos(i,1);
noj= Nos(i,2);
%
K(noi*2-1:noi*2,noi*2-1:noi*2)= K(noi*2-1:noi*2,noi*2-
1:noi*2)+kg(1:2,1:2);
K(noi*2-1:noi*2,noj*2-1:noj*2)= K(noi*2-1:noi*2,noj*2-
1:noj*2)+kg(1:2,3:4);
K(noj*2-1:noj*2,noi*2-1:noi*2)= K(noj*2-1:noj*2,noi*2-
1:noi*2)+kg(3:4,1:2);
K(noj*2-1:noj*2,noj*2-1:noj*2)= K(noj*2-1:noj*2,noj*2-
1:noj*2)+kg(3:4,3:4);
%
%
M(noi*2-1:noi*2,noi*2-1:noi*2)= M(noi*2-1:noi*2,noi*2-
1:noi*2)+mg(1:2,1:2);
M(noi*2-1:noi*2,noj*2-1:noj*2)= M(noi*2-1:noi*2,noj*2-
1:noj*2)+mg(1:2,3:4);
M(noj*2-1:noj*2,noi*2-1:noi*2)= M(noj*2-1:noj*2,noi*2-
1:noi*2)+mg(3:4,1:2);
M(noj*2-1:noj*2,noj*2-1:noj*2)= M(noj*2-1:noj*2,noj*2-
1:noj*2)+mg(3:4,3:4);
%
end
%
%simulação das condições de apoio (biapoiada)
%
K(1,1)=K(1,1)+100;
%
%
K(2,2)=K(2,2)+100;
%
%
%
```

```

K(4,4)=K(4,4)+100;
%
%
% apoios
%
%
gdlfixos=[]; % graus de liberdade fixos
todososgdl=1:10; % numero de graus de liberdade, neste caso são 2 por nós.
logo dá 6 gdl
%
gdllivres= setdiff(todososgdl,gdlfixos);
%
%
%
kf=K(gdllivres,gdllivres);
mf=M(gdllivres,gdllivres);

%cálculo das frequencias naturais e dos modos de vibração
modos=length(gdllivres); % modos de vibração
[U,w]= eig(kf,mf);
display('frequencias naturais do sistema global em hz:');
%
for i=1:modos
    disp(sqrt(w(i,i))/(2*pi)); %conversão para hz
end

% % %
% % Construção de FRF
% % Vector de frequencias
f_final=10; % gama de frequencias
res=4000; % passo das frequencias
f_inicial=f_final/res; % frequencia inicial
f=zeros(f_final,1); % vector de frequencias
%
%
%
for i=1:res
    if i==1
        f(i)=f_inicial;
    else
        f(i)=f(i-1)+f_final/res;
    end
end
% % Construção da matriz de rigidez dinamica e da matriz das FRF's
for i=1:res
    Z=kf-((2*pi*f(i))^2)*mf; % Matriz da rigidez dinamica
    H=inv(Z); % Matriz da Receptância (FRF)
    fprintf(fid,'%d\t',f(i)); % escrita das frequencias no ficheiro criado
    anteriormente
    for k=1:length(gdllivres)
        for j=1:length(gdllivres)
            fprintf(fid,'%3.10g\t',(H(k,j)));
            %fprintf(fid,'%3.10g\t',20*log10(abs(H(k,j)))); % escrever FRFs
em decibel
        end
    end
end
end

```

```

        fprintf(fid,'\n'); % Mudar de linha após escrever para uma frequencia
    end
    status=fclose(fid); % mandar fechar o ficheiro após escrita
%

```

Estrutura Treliçada massa-mola com elemento 1 danificado;

Para os restantes, o procedimento é análogo.

```

clear all;
clc;
%
[fid,msg]=fopen('Trelica_7_barras_Dano1.dat','w'); % criar ficheiro de
escrita
%
%
Li= 1;
teta= [0 60 -60 -60 60 0 0];
L= [Li Li Li Li Li Li Li];
Nos= [ 1 2; 1 3; 2 3; 1 4; 2 5; 4 3; 3 5];
%

K= zeros(10);
M= zeros(10);

%
for i= 1:7 % numero de elementos, nesye caso sao 7
    %
    if i==1
        ke= zeros(2);
        ke(1,1)= 500/L(i);
        ke(1,2)= -500/L(i);
        ke(2,1)= -500/L(i);
        ke(2,2)= 500/L(i);
    else
        % matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais
        %
        ke= zeros(2);
        ke(1,1)= 1000/L(i);
        ke(1,2)= -1000/L(i);
        ke(2,1)= -1000/L(i);
        ke(2,2)= 1000/L(i);
        %
        %
    end
    % matriz de massa do elemento em coordenadas locais
    %
    C=L(i);
    %
    me= zeros(2);
    me(1,1)= 1;
    me(1,2)= 0;
    me(2,1)= 0;
    me(2,2)= 1;
    %
    me=C*me;
    %

```

```

%
%
% matriz de transformação de coordenadas
%
T= [cosd(teta(i))  sind(teta(i))  0  0;...
    0  0  cosd(teta(i))  sind(teta(i))];
%
% matriz de rigidez em coordenadas globais
%
kg= T' * ke * T;
%
mg= T' * me * T;
%
% montagem
%
noi= Nos(i,1);
noj= Nos(i,2);
%
K(noi*2-1:noi*2,noi*2-1:noi*2)= K(noi*2-1:noi*2,noi*2-
1:noi*2)+kg(1:2,1:2);
K(noi*2-1:noi*2,noj*2-1:noj*2)= K(noi*2-1:noi*2,noj*2-
1:noj*2)+kg(1:2,3:4);
K(noj*2-1:noj*2,noi*2-1:noi*2)= K(noj*2-1:noj*2,noi*2-
1:noi*2)+kg(3:4,1:2);
K(noj*2-1:noj*2,noj*2-1:noj*2)= K(noj*2-1:noj*2,noj*2-
1:noj*2)+kg(3:4,3:4);
%
%
M(noi*2-1:noi*2,noi*2-1:noi*2)= M(noi*2-1:noi*2,noi*2-
1:noi*2)+mg(1:2,1:2);
M(noi*2-1:noi*2,noj*2-1:noj*2)= M(noi*2-1:noi*2,noj*2-
1:noj*2)+mg(1:2,3:4);
M(noj*2-1:noj*2,noi*2-1:noi*2)= M(noj*2-1:noj*2,noi*2-
1:noi*2)+mg(3:4,1:2);
M(noj*2-1:noj*2,noj*2-1:noj*2)= M(noj*2-1:noj*2,noj*2-
1:noj*2)+mg(3:4,3:4);
%
end
%
%
%
K(1,1)=K(1,1)+100;
%
%
K(2,2)=K(2,2)+100;
%
%
%
K(4,4)=K(4,4)+100;
%
%
% apoios
%
%
gdlfixos=[]; %
todososgdl=1:10; % numero de graus de liberdade, neste caso são 2 por nós.
logo dá 6 gdl
%
gdl livres= setdiff(todososgdl,gdlfixos);
%
%
```

```

%
kf=K(gdllivres,gdllivres);
mf=M(gdllivres,gdllivres);

%cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração
modos=length(gdllivres); % modos de vibração
[U,w]= eig(kf,mf);
display('frequências naturais do sistema global em hz:');
%
for i=1:modos
    disp(sqrt(w(i,i))/(2*pi)); %conversão para hz
end

% %
% % Construção de FRF
% % Vector de frequências
f_final=10; % gama de frequências
res=4000; % passo das frequências
f_inicial=f_final/res; % frequência inicial
f=zeros(f_final,1); % vector de frequências
%
%
%
for i=1:res
    if i==1
        f(i)=f_inicial;
    else
        f(i)=f(i-1)+f_final/res;
    end
end
% % Construção da matriz de rigidez dinâmica e da matriz das FRF's
for i=1:res
    Z=kf-((2*pi*f(i))^2)*mf; % Matriz da rigidez dinâmica
    H=inv(Z); % Matriz da Receptância (FRF)
    fprintf(fid,'%d\t',f(i)); % escrita das frequências no ficheiro criado
    anteriormente
    for k=1:length(gdllivres)
        for j=1:length(gdllivres)
            fprintf(fid,'%3.10g\t',(H(k,j)));
            %fprintf(fid,'%3.10g\t',20*log10(abs(H(k,j)))); % escrever FRFs
em decibel
        end
    end
    fprintf(fid,'\n'); % Mudar de linha após escrever para uma frequência
end
status=fclose(fid); % mandar fechar o ficheiro após escrita
%
```